第11卷 第2期
1989年5月

地震学报
ACTA SEISMOLOGICA SINICA

Vol. 11, No. 2
May, 1989

地震层析成象的 Δ-ζ 变换

武利钧　冯锐
(国家地震局地球物理研究所)

摘　要

由 Radon 变换出发给出了地震走时问题的 Δ-ζ 变换. 定义模型坐标 (x, z) 与震源位置 (Δ) 和射线斜率 (ζ) 间的线性关系为 $x = \Delta + \zeta z$. 文中给出了 Δ-ζ 正反变换的理论公式,并分析了 Δ-ζ 变换与富氏变换的关系. 理论表明,连续函数的 Δ-ζ 变换可得到走时反演问题的唯一解.

在地震学非完全层析成象中,欲提高图象质量必须压制假频和提高分辨. 作者对重建图象的分辨进行了详细讨论,最后通过数值模拟讨论了观测系统和滤波处理的影响.

关键词　地震层析成象; Δ-ζ 变换; Radon 变换;走时反演

一、引　言

计算机层析成象 (Computerized Tomography) 是七十年代末发展起来的重要图象重建技术. 对于一个二维原函数,可由其不同方向的线积分形成投影函数族,利用实测的投影函数来恢复原函数并以图象的形式输出是 CT 技术的基本内容, 它的理论基础是 Radon 变换,目前在医学、电子学和物理学领域已有广泛的应用[1].

在地震学中, 根据实测的走时资料反演地球内部介质慢度分布以进行地质解释推断是常遇到的反演问题. 此时, 地震波的走时是介质慢度(波速的倒数)沿射线路径的线积分,它与医学 CT 中的衰减是介质吸收的线积分一样, 都涉及到同样的数学问题. 地震学的走时反演, 实质上即是对介质慢度分布的图象重建. 尽管广义逆矩阵法[2]是目前地震学走时反演中最广泛采用的算法,但因其计算量很大且分辨有限等原因,限制了对复杂模型的应用. 本文从 Radon 变换出发,提出地震走时反演的 Δ-ζ 变换, 并利用它与富氏变换关系导出 Δ-ζ 反变换公式. 理论表明,连续函数的 Δ-ζ 反变换不仅存在解, 而且是唯一的.

在地震测深的实际观测中,由于震源与接收点的离散分布与有限角观测,不可能得到完整的投影函数,于是滤波和插值处理不可避免地被引入到计算过程中,所得到的解是近似的. 评价反演解优劣的标志之一是解的分辨尺度. 本文分别对解的横向分辨与纵向分辨进行了定量分析,最后对数值模拟的计算结果做了具体讨论.

1987年2月7日收到本文初稿, 1987年10月23日决定采用.

http://www.dizhenxb.org.cn

二、Δ-ζ 变 换

1. 正问题的线性化描述

对于介质波速呈纵横向非均匀分布的地球模型，介质慢度分布可表成矢径 $\boldsymbol{r}$ 的函数 $u = u(\boldsymbol{r})$，由震源 S 到观测点 R 的地震波走时为

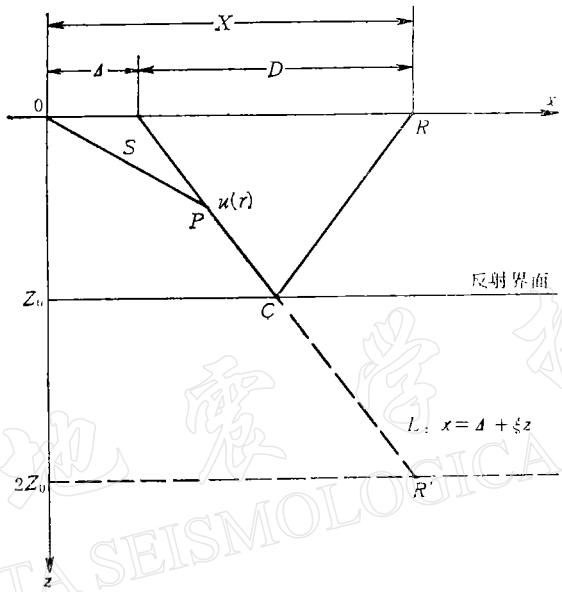

图 1　Δ-ζ 变换的几何解释

$$\hat{t} = \int_s u(\boldsymbol{r})dS \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\Delta, x, u)$，$\Delta$ 和 x 分别为 S 点和 R 点的水平坐标，积分是沿射线路径 s 进行的，走时 $\hat{t}$ 与介质慢度 u 呈非线性关系．由于介质慢度的变化会引起地震波射线路径的改变，故地震波走时 $\hat{t}$ 是由介质慢度与射线路径二者决定的．对公式(1)进行变分有

$$\delta\,\hat{t} = \int_s \delta u(\boldsymbol{r})\,dS \tag{2}$$

式中，$\delta u(\boldsymbol{r}) = u(\boldsymbol{r}) - u_0(\boldsymbol{r})$．$u_0$ 是介质慢度的基准分布，δu 是相应于 u_0 的微扰．公式(2)成立的条件是要求扰动量 δu 的大小能使费马原理仍旧适用，即走时相对于路径的扰动为稳定值．这实际上是对(1)式的线性化处理：地震走时的变化 $\delta\hat{t}$ 只与介质慢度的扰动 δu 有关而与射线路径 s 无关，射线路径的基本形状是由基准慢度分布 $u_0(\boldsymbol{r})$ 所决定的．

2. Δ-ζ 正变换

对于一般情况，基准慢度 u_0 的分布为 (x, z) 的函数，射线路径是弯曲的，(2)式的计算比较复杂，涉及 CT 理论的广义 Radon 变换．我们限定本研究是在常数 u_0 情况下的二维反射波观测．u_0 为常数的约束尽管是对物理模型的很大简化，但当研究区域较小、

http://www.dizhenxb.org.cn

速度的相对变化量小于 15% 时，已有研究结果表明[3]，它仍能够较好的表征模型的基本特征，在计算上带来的好处是射线路径可做直线处理．本文对模型所做的第二点约束是反射界面与观测平面平行，当待成象的区域不大时，可认为是对斜界面或弯曲界面的一阶逼近．根据图 1 所示，待成象模型中任一点的坐标 (x,z) 同参量 Δ，ζ 有关系为

$$x = \Delta + \zeta z \tag{3}$$

式中，Δ 定义为震源位置的水平坐标，ζ 为射线路径的斜率，亦即地震射线出射角 α 的正切量

$$\zeta = \mathrm{tg}\alpha = p/(u_0^2 - p^2)^{1/2}$$

这里 p 为射线参数，亦为基准波慢度 u_0 的水平分量，$p = u_0 \sin\alpha = dt/dx$． 考虑到积分元 $ds = dz/\cos\alpha$，Z_0 为反射界面的深度，当将反射波依 Z_0 平面做镜象投影后，(2)式可写成

$$\Delta t(\Delta,\zeta) = \Delta\hat{t} \cdot \cos\alpha = \int_0^{2Z_0} \Delta u(\Delta + \zeta z, z)dz \tag{4}$$

应指出，(3)式给出了模型坐标 (x, z) 与震源位置 Δ 和射线斜率 ζ 间的线性关系；而(4)式则是原函数 $\Delta u(x,z)$ 沿直线路径的线积分，亦是 Radon 变换在地震走时问题中的一个具体表达形式，它将 x-z 域的函数 Δu 变换到 Δ-ζ 域的 Δt，我们定义它为 Δ-ζ 变换．Δ-ζ 变换是一个线性变换，在几何上为慢度扰动 $\Delta u(x,z)$ 沿直线 L 的线积分（图 1）．直线 L 的方程即为(3)式；Δ-ζ 变换的物理意义是慢度扰动 $\Delta u(x, z)$ 向某一方向 ζ 上的映射．于是走时反演问题便归结为如何由不同震源在不同方向上形成的投影函数 Δt 来恢复原函数 Δu，地震层析成象的目的在于建立它的反变换形式，当将原函数 Δu 加到基准慢度 u_0 上之后，便最终得到了走时反演解——待测区域的介质速度(或慢度)的二维分布．

3. Δ-ζ 变换与富氏变换

为了探讨 Δ-ζ 变换的内在含义，现采用富氏变换对它进行分析，并进而导出 Δ-ζ 反变换．介质慢度扰动量 $\Delta u(x,z)$ 的二维富氏变换为

$$\Delta U(k_x,k_z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Delta u(x,z)\exp[i(k_x x + k_z z)]dxdz \tag{5}$$

式中 k_x, k_z 分别为水平波数和垂直波数，且

$$\begin{cases} k_x = \omega p \\ k_z = \omega\eta \end{cases} \tag{6}$$

η 为地震波的垂直慢度，$\eta = u_0\cos\alpha$，ω 为圆频率． 图 2(a) 的 xz 坐标系是依左旋顺时针定义投影直线 $\Omega\Omega'$ 转角 α 的，而对于二维富氏变换公式(5)的 k_x，k_z 坐标系（图 2b)，与投影直线相对应的中心切片 WW' 的转角 θ 是按右旋顺时针规定的．

于是:

$$\Xi = k_z/k_x = \eta/p = \mathrm{tg}\theta \tag{7}$$

而

$$\zeta = \Delta x/\Delta z = \eta/p = \mathrm{tg}\,\alpha \tag{8}$$

故

http://www.dizhenxb.org.cn

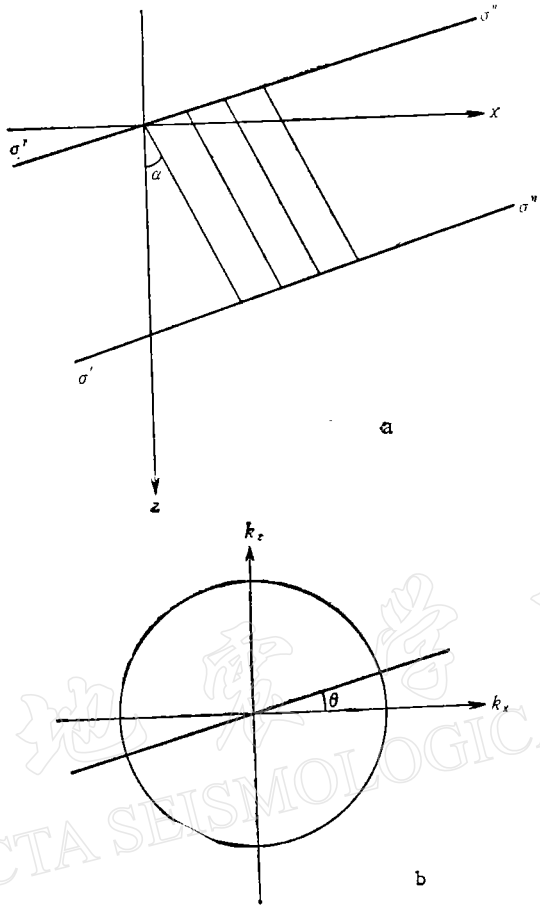

图 2　△-ξ 变换与富氏变换的关系

$$\Xi = -\zeta \tag{9}$$

将 $k_z = -\zeta k_x$ 代入(5)式可得

$$\Delta U(k_x, -\zeta) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Delta u(x,z) \exp[ik_x(x - \zeta z)]\, dx dz$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} \Delta u(x,z) \exp(ik_x \Delta) dx dz \tag{10}$$

$\Delta U(k_x, -\zeta)$ 是 $\Delta u(x,z)$ 的二维富氏谱的一种点斜式表达．它表示了二维富氏谱 在-ζ 方向上的取值．如果对二维富氏谱函数 $\Delta U(k_x, -\zeta)$ 再做 k_x 的一维富氏反变换，积分宗量仍为△有

$$\Delta t(\Delta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta U(k_x, -\zeta) \exp(-ik_x \Delta) dk_x$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\iint_{-\infty}^{+\infty} \Delta u(x,z) \exp(ik_x \Delta) dx dz \right] \exp(-ik_x \Delta) dk_x$$

http://www.dizhenxb.org.cn

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta u(\Delta + \zeta z, z) dz \tag{11}$$

考虑到富氏变换的线性关系，规定 $z < 0$ 以及 $z > 2Z_0$ 区域内介质慢度为零，这样经对(11)式的有限化即得到(4)式． 显然地震走时问题中的 Δ-ζ 变换实际上是介质慢度的二维富氏变换，再在某一方向进行富氏变换的结果．换言之，原函数的 $\Delta u(x, z)$ 相继经 Δ-ζ 变换和沿 Δ 方向的一维富氏变换后，其结果等于原函数的二维富氏变换在 $\theta = -\mathrm{tg}^{-1}\zeta$ 方向的取值，这就是切片定理．

4. Δ-ζ 反变换公式

对 $\Delta U(k_x, k_z)$ 求二维富氏反变换

$$\Delta u(x, z) = (1/4\pi^2) \iint_{-\infty}^{+\infty} \Delta U(k_x, k_z) \exp[-i(k_x x + k_z z) dk_x dk_z \tag{12}$$

考虑到 $dk_z = -|k_x| d\zeta$，则

$$\Delta u(x, z) = (1/4\pi^2) \int_{-\infty}^{+\infty} -d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} |k_x| \Delta U(k_x, -\zeta) \exp[-ik_x(x - \zeta z)] dk_x \tag{13}$$

(13)式内层积分是 $|k_x|$ 与 $\Delta U(k_x, \zeta)$ 的积对 k_x 求富氏反变换，其积分宗量为 $x - \zeta z = \Delta$． 利用褶积性质，并考虑到绝对值函数在广义函数意义下的富氏反变换为（证明见附录）

$$(1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} |k_x| \exp(-ik_x \Delta) dk_x = -(1/\pi\Delta^2) \tag{14}$$

则由(11)和(14)式可得

$$\Delta u(x, z) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} [(1/\pi\Delta^2) * \Delta t(\Delta, -\zeta)] d\zeta$$

$$= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta t^0(x - \zeta z, -\zeta) d\zeta \tag{15}$$

$$\Delta t^0(x, -\zeta) = (1/\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta t(x', -\zeta)/(x - x')^2 dx' \tag{16}$$

式中 $*$ 表示褶积符号．

公式(15)即为 Δ-ζ 反变换公式．根据 Radon 变换的基本理论[4] (Gel'fand et al. 1966)．对于 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的连续 ζ 值，当 $\Delta t(\Delta, \zeta)$ 在 Δ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 内为连续值时，反演解 $\Delta u(x, z)$ 被(15)式唯一的确定．

5. 与 τ-p 变换的对比

地震学中的 τ-p 变换是将地震记录的时间剖面(走时 t 与震中距 x)依关系 $t = \tau + px$，变换到截距时 τ 和射线参数 p 域中，以便于提取有用信息．将 Δ-ζ 变换与地震学的 τ-p 变换进行对比可以看到，尽管它们原函数的物理含义不同，然而两者之间具有相同的数学形式和几何意义．它们都表示为原函数沿某一方向直线的积分或迭加，τ-p 变换在地震学中被称为倾斜叠加[5]．通过倾斜叠加来完成场的转换具有如下两个特点：确定转换场内一点的值，需要原函数场内一条直线的值，反之如是，这是一种点线转换关系；在完成场的转换过程中，描述两个场位置点的坐标要满足形如公式(3)的关系．

http://www.dizhenxb.org.cn

三、数 值 模 拟

前节所给出的 Δ-ζ 正反变换关系是对连续函数得到的，这种完全投影的图象重建条件并不是实际观测所能全部满足的，由于在对介质的慢度分布进行反演时需对公式(15)做离散化处理，而且走时资料又是在有限的角度范围内取得的，故反演解的误差和不确定性总是不可避免的，因此对图象质量进行必要的评价是图象重建过程中不可缺少的步骤，本文将从公式（15）出发详细论述解的分辨度与观测系统的关系和提高图象质量的必要条件，并通过数值模拟结果予以说明.

1. 反演公式的离散化以及 Δ 与 D 的关系

为了计算图 3 区域的慢度分布，可将该区域按网格划分，算出第 i 点的慢度 $\Delta u(x_i, z_i)$，公式(15)的离散化形式为

$$\Delta u(x_i, z_i) = (1/2\pi)\Delta\zeta \cdot \sum_{k=-M}^{M} \Delta t^0(x_i, -\zeta_k z_i, -\zeta_k) \tag{17}$$

式中 $\zeta_k = k\Delta\zeta$，依次对 ζ_{-M} 到 ζ_M 的走时扰动量 Δt^0 迭加. 若射线扫瞄的范围 $\zeta_a = 2M \cdot \Delta\zeta$，对于一定的射线斜率增量 $\Delta\zeta$ 而言，当 ζ_a 愈大时，反演解愈逼近真解且分辨能力愈强. 为满足这一条件，应对观测系统的炮点和接收点的分布分别加以研究. 由图

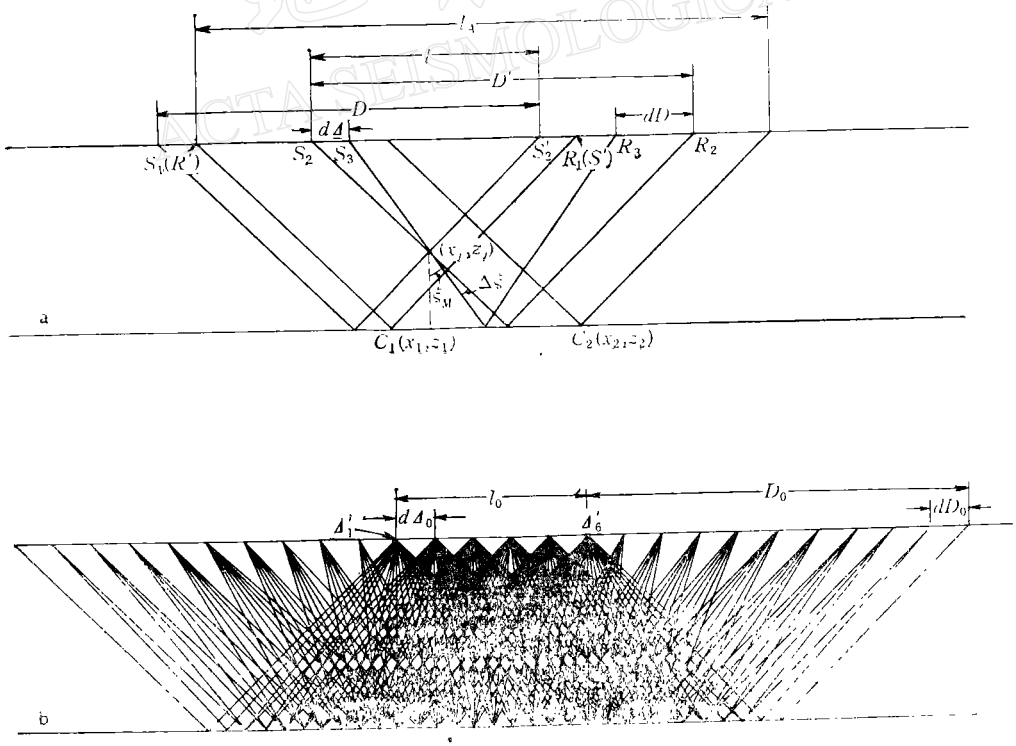

图 3　观测系统

a. 理想情况；b. 实际布设

http://www.dizhenxb.org.cn

3(a),欲考虑任意一点 (x_j, z_j) 点的重建图象,若穿经该点的射线斜率的正负极值分别为 ζ_M 和 ζ_{-M},那么该二条射线所对应的炮点的间距 SS' 为 l,相应的炮检距 SR (或 $S'R'$) 为 D,并有

$$l = 2z_j \cdot \zeta_M$$
$$D = 2z_0 \cdot \zeta_M \tag{18}$$

当然,为提高图象分辨,除应扩大观测角度的范围(相应于提高 ζ_M 值)外,还需同时提高射线的扫瞄密度(即需减小 $\Delta\zeta$ 值). 由图 3a,射线斜率增量 $\Delta\zeta$ 与炮点间距 $d\Delta$ 和观测点间距 dD 有关系

$$d\Delta = -z_j \cdot \Delta\zeta$$
$$dD = 2z_0 \cdot \Delta\zeta \tag{19}$$

由上二式可得到炮点与观测点间关系式

$$l = (z_j/z_0)D$$
$$d\Delta = (z_j/2z_0)dD \tag{20}$$

上述关系只给出了设计观测系统时的一定原则. 由于在实际观测时受到各种条件的限制,炮点与测点的布设范围 (l_0, D_0) 与间距 $(d\Delta_0, D_0)$ 都为预先确定量(图 3b),难以完全满足上述理论条件,解的分辨能力显然会受到损害,这在下边的实例中将看得很清楚.

2. 分辨与假频

地震学反演中,常用分辨来描述反演解的不确定性. 对于以图象形式作为走时反演结果而言,解的分辨尺度具有简单的几何意义,它可以被规定为图象重建区域内能够被区分开的任意两点的最小距离,反演解能唯一确定时为极小;解完全不能确定时为极大. 对于需要进行插值计算的(17)式, 解的分辨尺度将分别依赖于射线斜率增量 $\Delta\zeta$ 和插值基点的间隔 $d\Delta_0$ 和 dD_0. 在二维介质慢度图象重建的过程中,可分别考虑横向分辨尺度 dx 和纵向分辨尺度 dz. 由(4)式可得解的横向分辨尺度

$$dx = d\Delta_0 + Z_j\Delta\zeta_0 \tag{21}$$

解的纵向分辨尺度不仅依赖解的横向分辨尺度 dx,而且与射线角度 $\alpha = \mathrm{tg}^{-1}\zeta$ 有关,在相同的 dx 时,离源角 α 愈大,纵向分辨尺度 δz 越小, 反之则越大. 考虑到射线斜率 ζ 为一定时,对坐标系中任意一点 (x_j, z_j) 有

$$\delta z = d[(x_j - \Delta)/\zeta] = -(d\Delta_0 + z_j\Delta\zeta_0)/\zeta \tag{22}$$

按照反演公式 (17), 对介质内任意一点慢度的确定需对穿过该点的地震射线从 ζ_{-M} 到 ζ_M 的 Δt^0 进行迭加,因此该点的纵向分辨尺度 dz 应对 δz 从 ζ_{+0} 到 ζ_{+M} 求平均则,

$$dz = -(d\Delta_0 + z_j\Delta\zeta_0)(\lg\zeta_M - \lg\zeta_{+0})/(\zeta_M - \zeta_{+0}) \tag{23}$$

公式(21)和(23)表明,分辨尺度取决于确定区域内实际观测系统的布设,射线斜率极值 ζ_M 和增量 $\Delta\zeta$ 分别通过(18)和(19)式由 dD_0 和 D_0 决定. 同前所述,公式(17)的计算要通过网格划分逐点进行,网格的大小依赖于解的分辨尺度,如果网格的尺寸小于解的分辨尺度,边叶效应会使图象变得模糊,即产生假频.

3. 观测系统与重建图象

图 4 是本文选取的理论模型. 反射界面深 4km,基准波速为 4km/s, 在所研究区域

http://www.dizhenxb.org.cn

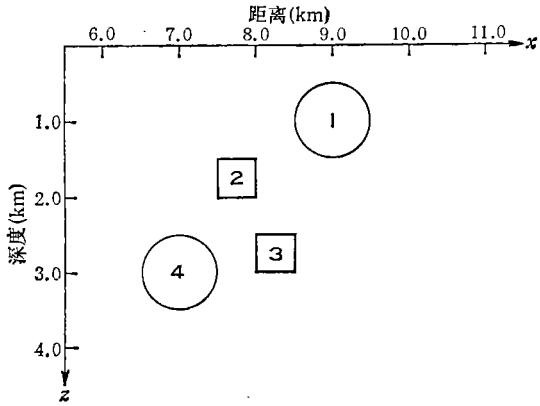

图 4　理论模型

内设置了四个波速异常体，其波速值均为3.8km/s，圆形 1 和 4 的圆心位置分别在 (7.0, 1.0)和(9.0,3.0)，圆半径均为 0.5km. 两个边长均为 0.5km 的方形 2 和 3 在两圆之间，两个方形之间最近距离为 0.5km.

从上述讨论中可以看到观测系统会直接影响到重建图象的质量. 为此本文采用不同的观测系统，对图 4 所示模型进行反演对比计算，得到该模型的重建图象(图 5—8，见图版). 首先以图 5 a 的观测系统为例：炮点分布范围 $l_0 = 5$km，炮点间距离 $d\Delta_0 = 0.1$ km，观测剖面长度 $D_0 = 10$km，观测点间距 $dD_0 = 0.1$km. 观测点分布在炮点两侧，由此推得地震射线分布范围 $\zeta_a = 2\zeta_M = 2.5$. 网格横向与纵向尺度皆为 0.1km. 在上述观测系统条件下进行反演计算，得到图 5a 所示的重建图象. 显然重建图象已基本恢复了原模型异常体的几何形状. 但是和原模型相比，异常体出现伸长变形，圆形 1 和 4 变为椭圆，圆形 2 和 3 变为长方形，表明重建图象的纵向分辨能力比横向分辨能力差；处于较深位置的异常体(圆 4)比较浅位置异常体(圆 1)和原模型形状相差要大，这表明随着所研究区域愈深，解的分辨愈差；异常体的边缘较为清晰，圆形 4 与矩形2,3虽已明显区分开，而介于异常体和非异常之间的斑斑点点的颜色显示出由有限角观测而引起解的近似性. 关于对观测系统与重建图象之间的关系可从 $d\Delta_0$, dD_0, l_0 和 ζ_0 的改变上看出来：(1)炮点间距离$d\Delta_0$. 对图 5a 观测系统只做炮点间距离 $d\Delta_0$ 的变动. 若 $d\Delta_0 = 0.5$km 得到图 5b 所示的重建图象. 和图 5a 相比，图 5b 图形的质量有所下降，异常体边缘变得模糊起来，而且异常体间相连部分的颜色已与异常体的颜色有所接近. 若 $d\Delta_0 = 1$km 得到图 5c 所示重建图象. 显然该图图形质量明显变坏，异常体的横向范围明显扩大，横向分辨能力明显减弱，特别是较深区域的异常体几何形状完全变了样，连成一片. 由图 5a—c，随着炮点间距的增大，分辨尺度增大. 在图 5c 中已经明显看到由于分辨尺度大于离散网格尺度，出现了假频现象并已经影响了图象的质量；(2) 测点间距 dD_0. 只对图 5b 观测系统做观测点间距离 dD_0 的变动. 图 6b，图 7b 分别是 $dD_0 = 0.5$km 和 $dD_0 = 1$km 的重建图象. 与图 5b 进行比较，可看到其中异常区横向变化不大，但纵向延伸加大. 由 6b 较为明显看出，在圆形 4 和矩形 2,3 的四周纵向上已经连接在一起，而圆形 4 和矩形 3 之间横向上仍保留空白区，表明观测点间距大小对于图形的纵向影响超过对横向的影响. 在图 6 中还可以看到观测点间距 dD_0 和 $d\Delta_0$ 间的相互影响关系，图中 $dD_0 = 0.5$km，按照公式

http://www.dizhenxb.org.cn

(19)，理想炮点间距 $d\Delta$ 应为 0.25km. 本文将实际炮点间距 $d\Delta_0$ 分设为 0.1，0.5，1km，得到图 6a, b, c 的重建图象. 将三幅图进行对比，尽管从 a — b 和从 b — c 炮点间距离以相同的比例增大，但是 a,b 两幅图变化很小，而 b,c 两幅图的变化却很大. 这表明对于实际鲍点间距离 $d\Delta_0$，当其小于理想炮点间距 $d\Delta = 0.25$km 时，加密炮点，减小炮点间距离，对于重建图象的质量影响不大. 相反若 $d\Delta_0 > 0.25$km 时，$d\Delta_0$ 的变化就会对图象产生较大的影响. $d\Delta_0$ 和 dD_0 的大小皆会影响反演解的分辨能力，但 $d\Delta_0$ 和 dD_0 是互相约束的，任何只对单一量的改变以达到提高解的分辨能力是不可能的；(3) 炮点分布范围 l_0 与射线斜率范围 ζ_α，只对图 5b 观测系统做炮点范围和射线斜率范围的变动. 炮点范围 $l_0 = 2$km，观测剖面长度不变，但改为单侧接收则 $\zeta_\alpha = 1.25$，经反演计算得到图8. 图 8 系观测系统为 $l_0 = 2$km，$d\Delta_0 = 0.1$km，$D_0 = 10$km，$dD_0 = 0.1$km 的慢度分布重建图象(观测点分布在炮点一侧). 仍与图 5a 比较，重建图象的质量明显降低，原模型异常体的几何形状完全破坏.

4. 滤波技术的合理应用

利用 Δ-ζ 反变换公式进行计算是一个反投影过程. 公式 (17)的内层积分表明这一过程并非简单迭加，而是一个褶积即滤波的过程. 实际反演计算表明，对于走时资料是否进行滤波将关系到重建图象的质量. 公式(16)中 $k(\Delta) = 1/2\pi^2\Delta^2$ 称为核函数，从表面上看在数值计算中只要对核函数进行离散化、有限化就行了，但实际上这样做是不行的，原因在于 $k(\Delta)$ 及其褶积积分并非一般意义下的函数积分. 当 $\Delta \to 0$ 时，$k(\Delta)$ 将取值无穷大. 为此，本文选用了 Shepp-logan 滤波器[1]，该滤波器形式为

$$k_j(\Delta_b) = \frac{2}{\pi^2(1-4j^2)\Delta_b^2} \tag{24}$$

式中 Δ_b 的选择也会影响重建图象的质量，图 9a，图 5a，图 9b，图 9c 是炮点分布范围 $l_0 = 5$km，而 Δ_b 分别选为 1，0.5，0.05，0.005 的重建图象(见图版)，结果表明 Δ_b 选择愈小，滤波效果愈好，图象愈清晰. 但 Δ_b 的减小也会受到观测系统和计算机时的限制. 因此要通过实验来选取最佳 Δ_b，才能保证重建图象的质量.

四、结 论

本文利用微扰动技术导出 Δ-ζ 变换，并利用它与富氏变换的关系，推导出走时问题中的 Δ-ζ 反变换公式. 通过 Δ-ζ 变换，可以将地震波走时扰动量解释为波慢度的扰动在不同方向上的投影值. 而地球内部任意一点慢度值的确定，需要通过该点的地震射线在不同方向上投影值的迭加，但是这种迭加是个褶积滤波过程，这是与其它走时反演算法所不同的. 计算结果已经显示出这类算法的优点，在观测系统满足一定条件之下，可以提供分辨能力强、图象清晰的二维介质慢度分布的重建图象.

应当指出，滤波反投影法在地震走时反演中的引入仍处在摸索、试验阶段. 因为走时反演中有许多自己特定的问题，它不仅涉及到观测系统，滤波技术等，而且要考虑射线路径的弯曲、多层、界面起伏等一系列复杂问题. 鉴于篇幅的限制，对这些问题本文将不做详细讨论.

http://www.dizhenxb.org.cn

本工作系地震科学联合基金会资助项目。

附录

广义函数意义下的积分变换

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|k_x|\exp(-ik_x\triangle)dk_x=-\frac{1}{\pi\triangle^2}\quad(\triangle>0)$$

证明如下：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|k_x|\exp(-ik_x\triangle)dk_x\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\infty}k_x\exp(-ik_x\triangle)dk_x-\int_{-\infty}^{0}k_x\exp(-ik_x\triangle)dk_x\right]\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}k_x\cos k_x\triangle dk_x\\&=\frac{1}{\pi\triangle^2}\int_0^{\infty}t\cos t\,dt\end{aligned}$$

上式推导的最后一步做 $t=k_x\triangle$ 则的定量代换．为得到上积分的解析表达式

令

$$I(a)=\int_0^{\infty}te^{-at}\cos t\ dt$$

在广义函数意义下有

$$I(0)=\int_0^{\infty}t\cos t\,dt$$

由

$$\begin{aligned}I(a)&=te^{-at}\sin t\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}[e^{-at}\sin t-ate^{-at}\sin t]dt\\&=a\int_0^{\infty}te^{-at}\sin t\ dt-\int_0^{\infty}e^{-at}\sin t\,dt\end{aligned}$$

而

$$\int_0^{\infty}te^{-at}\sin tdt=-te^{-at}\cos t\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-at}\cos tdt-a\int_0^{\infty}te^{-at}\cos tdt$$

则

$$I(a)=\frac{1}{1+a^2}\left[a\int_0^{\infty}e^{-at}\cos tdt-\int_0^{\infty}e^{-at}\sin t\,dt\right]$$

由于

$$\int_0^{\infty}e^{-at}\cos tdt=\frac{a}{1+a^2},\quad\int_0^{\infty}e^{-at}\sin t\,dt=\frac{1}{1+a^2}$$

$$I(0)=-1$$

则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}|k_x|\exp(-ik_x\triangle)dk_x=\frac{1}{\pi\triangle^2}\int_0^{\infty}t\cos tdt=-\frac{1}{\pi\triangle^2}$$

或可简写成

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|k_x|\exp(-ik_x\triangle)\,dk_x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}k_x\cos k_x\triangle dk_x=\frac{1}{\pi\triangle^2}\int_0^{\infty}t\cos t\ dt$$

$$I(a)=\int_0^{\infty}te^{-at}\cos t\,dt=\frac{1}{1+a^2}\left[a\int_0^{\infty}e^{-at}\cos tdt-\int_0^{\infty}e^{-at}\sin tdt\right]$$

地震学报 ACTA SEISMOLOGICA SINICA

http://www.dizhenxb.org.cn

$$= \frac{a-1}{(1+a^2)^2}, \text{ 而 } I(0) = \int_0^\infty t\cos t dt = -1$$

则最终证明了关系:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |k_x| \exp(-ik_x\Delta) dk_x = \frac{-1}{\pi\Delta^2}$$

参 考 文 献

[1] Scudder, H.J., 1978. Introduction to computer aided tomography. *Proc. IEEE*, **66**, 628—637.

[2] Aki, k., and P.G., Richards, 1980. *Quantitative Seismology: Theory and Methods*, **II**, W.H.Freeman and Co..

[3] Worthington, M.H. ,1984. An introduction to geophysical tomography. *First Break*, **2**, 11, 20—25.

[4] Gel'fand I.M., M.I. Graev and N. Ya., 1966. *Vilenkin Generalized Functions*, **5**, Integral geometry and representation theory, Academic Press, New York.

[5] Clayton, R., and G. McMechan, 1981. Inversion of refraction data by wave field continuation. *Geophysics*, **46**, 860—868.

THE Δ-ζ TRANSFORM IN SEISMIC TOMOGRAPHY

Wu Lijun and Feng Rui

(*Institute of Geophysics, State Seismological Bureau*)

地震学报 ACTA SEISMOLOGICA SINICA

Abstract

Based on Radon transform, the Δ-ζ transform for seismic travel-time inversion is proposed in this paper. We define the linear relationship of model coordinates (x, z), source position Δ and seismic ray slope ζ by an equation $x=\Delta+\zeta z$. The theoretical equations of forward and inverse Δ-ζ transforms are given, then therelationship between the Δ-ζ and Fourier transforms is discussed. It is shown in theory that a unique solution can be derived with continuous Δ-ζ transform.

For an incomplete tomographic image reconstruction in seismology, in order to avoid the artificiality and to increase the resolution so as to improve the image quality, the authors give a detailed discussion about the resolution of reconstructed image. Finaly, the influnce of observational system and filter approach upon the reconstruction is discussed through numerical computation.

http://www.dizhenxb.org.cn