

# 基于混合有限元格式的完美匹配层与 多次透射公式人工边界比较研究<sup>\*</sup>

李 宁<sup>1),\*</sup> 谢礼立<sup>1, 2)</sup> 翟长海<sup>1)</sup>

1) 中国哈尔滨 150090 哈尔滨工业大学土木工程学院

2) 中国哈尔滨 150080 中国地震局工程力学研究所

**摘要** 介绍了完美匹配层(PML)人工边界可以吸收不同频率和任意角度入射波的原理以及 PML 人工边界的构造方法. 在此基础上, 将 PML 人工边界应用于地震波动数值模拟的速度-应力混合有限元格式中, 探讨了 PML 应用的可行性, 并通过数值试验研究了 PML 人工边界的反射率, 比较了 PML 人工边界与多次透射公式(MTF)人工边界应用于体波和面波模拟中数值反射的差异, 对两种边界的透射效果进行了分析. 结果表明, 尽管数值离散后 PML 人工边界不再保持完美匹配特性, 但 PML 人工边界在近场波动数值模拟中可获得比 MTF 人工边界更为理想的吸收效果, 在角点透射、大角度掠射情形下尤为明显; PML 人工边界在混合有限元格式的数值算法中, 未见失稳等不良反应, 比 MTF 人工边界有更好的稳定性; 在合理选择参数的情况下, PML 人工边界的运算量可接受.

**关键词** 完美匹配层 多次透射公式 弹性波 人工边界 混合有限元

**中图分类号:** TU352.1 **文献标识码:** A

## 引言

人工边界的构造是近场地震波数值模拟过程中最重要的问题之一. 在一定计算区域内, 针对如何让外行波的能量在有限域边界处衰减、吸收这一问题, 国内外学者提出了基于各类型波动方程、适用于不同情况的全局或局部人工边界. Béranger(1994)在电磁波数值模拟中, 最先提出了完美匹配层(perfectly matched layer, 简称 PML)人工边界. 该方法在理论上对任意角度、任意频率入射的波动都具有零反射率.

近十几年来, 关于 PML 人工边界的研究进展迅速. Chew 和 Weedon(1994)以及 Béranger(1996)将 PML 人工边界的应用拓展到三维 Maxwell 方程的模拟中; Chew 和 Weedon(1994)利用基于复坐标变换和微分算子分解的方法重新解释了 PML 理论, 为 PML 人工边界进一步应用于其它类型的波动方程奠定了理论基础. 自此, PML 人工边界被迅速应用于各类波动方程的模拟中. 例如, 线性欧拉方程(Hesthaven, 1998), 多孔弹性介质中的波动方程(Zeng *et al.*, 2001), 声波方程(Liu, Tao, 1997; Qi, Geers, 1998; Hagstrom, Hariharan, 1998), 以及弹性波方程(Chew, Liu, 1996; Hastings *et al.*, 1996; Collino, Tsogka, 2001; Komatitsch, Tromp, 2003). 此外, Collino 和 Monk(1998)研究了二

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金项目(50608024, 50538050)资助.  
2007-01-18 收到初稿, 2007-11-04 决定采用修改稿.

<sup>†</sup> 通讯作者. e-mail: nealleeht@hotmail.com

维曲线坐标系下电磁波模拟中 PML 人工边界的应用问题. 同时, PML 人工边界在这些应用中显现出一些问题, 如应用仅限于一阶偏微分方程(组)描述的波动系统, 数值离散后 PML 人工边界不再保持完美匹配特性, 并引起一定程度的数值反射等. 虽然 PML 人工边界在波动数值模拟的很多领域中都得到了应用, 但在地震工程中将其作为人工边界用于模拟场地的动力反应尚处于起步阶段. Basu 和 Chopra(2003, 2004)将 PML 人工边界用于谐波激励的土-结相互作用的模拟中; 国内学者赵海波等(2007)在饱和孔隙介质中弹性波模拟中应用了 PML 人工边界.

国内学者 Liao 和 Wong(1984)提出的多次透射公式(multi-transmitting formula, 简称 MTF), 理论上可构造出任意精度的人工边界. 但在实际应用中, 由于入射波并非理想平面波以及数值算法的因素, 导致 MTF 人工边界的精度和稳定性受到一定影响. 目前, 关于 MTF 人工边界的研究主要是着眼于如何提高精度和稳定性(周正华, 廖振鹏, 2001; 张晓志, 2005)等.

PML 和 MTF 均可用于构造高精度的人工边界, 理论上不会产生反射波, 但数值离散后两种边界都将产生数值反射. 由于数值反射的影响因素较多, 目前尚无较好的衡量标准. 这是因为, 这两种人工边界的理论差异较大, PML 人工边界主要是在频域内修改本构, MTF 人工边界则是使用多项式插值以及人为假定视波速来构造, 两者产生误差的主要原因不同. 因此, 仅能通过特定的数值试验来检验和度量. 另外, 构造一种能同时用于两种边界的内域算法, 也是进行误差比较并得出可靠结论的重要因素之一.

本文首先介绍了 PML 人工边界在理论上吸收不同频率和任意角度入射波的基本原理及其构造方法. 然后结合地震波动数值模拟中的速度-应力混合有限元算法, 分别构造了 PML 和 MTF 人工边界. 通过一类简单的脉冲激励下的体波和面波的模拟, 探讨了 PML 和 MTF 人工边界与混合有限元结合的特点. 最后通过数值试验, 初步研究了 PML 人工边界的反射率, 并比较了 PML 和 MTF 应用于体波和面波模拟中数值反射的差异以及两种边界的透射效果.

## 1 两种人工边界

### 1.1 PML 人工边界

PML 人工边界条件的基本原理是对连续的偏微分方程(组)系统引入如下复坐标变换:

$$x_i \rightarrow \tilde{x}_i(x) = \int_0^{x_i} s_i(d(\xi), \omega) d\xi \quad (1)$$

式中,  $x_i$  为空间中某坐标方向基矢量;  $s_i$  是矢量  $x_i$  和频率  $\omega$  的连续函数,  $s_i$  函数可以根据问题不同需要来选取. Chew 和 Liu(1996)选用了如下的形式:

$$s_i = 1 + i \frac{d_i(\xi)}{\omega} \quad (2)$$

式中,  $d_i(\xi)$  是在  $x_i$  方向上引入的阻尼函数;  $\xi$  是  $x_i$  方向距离 PML 内边界的距离, 其值在 PML 人工边界以内的区域为零. 由式(2)可知, 此时式(1)中的  $\tilde{x}_i$  将退化为  $x_i$ . 通过式(1)的坐标变换, 外行波解答  $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$  在 PML 人工边界域内是按式(3)表达的衰减波继续传播的

$$\exp \left[ i\omega \left( t - \frac{\mathbf{k}}{\omega} \cdot \mathbf{x} - \frac{k_i}{\omega} \int d_i(\xi) d\xi \right) \right] \quad (3)$$

即在  $x_i$  方向上, 外行波幅值以指数  $\exp \left[ -\frac{k_i}{\omega} \int d_i(\xi) d\xi \right]$  随距离  $\xi$  的增大迅速衰减. 因此, 若该衰减参数选择适当, 则外行波在经过若干层单元的衰减后, 波动能量将迅速衰减掉. 由于  $k_i/\omega$  是  $x_i$  方向上波的传播速度, 故衰减系数与频率无关(非频散波情形). 同理, 对偏微分算子同样做式(1)的变换, 即对波动控制方程中关于  $x_i$  的偏导数, 通过式(1)的复坐标变换, 则可得到

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{i\omega}{i\omega + d_i(\xi)} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (4)$$

利用式(1)和式(4)得到新的波动控制方程, 也就是 PML 内的波动控制方程. 该控制方程的理论解就具备了上述的在某一方向上按特定衰减率衰减的特性, 这就是 PML 人工边界完美匹配特性的基本数学原理.

## 1.2 MTF 人工边界

MTF 人工边界基本做法是, 通过假设外行波以平面波形式(假定的人工视波速)入射, 然后利用透射概念对入射波和误差波进行多次透射, 直至满足一定的误差要求为止.  $N$  阶 MTF 人工边界格式如下:

$$u_0^{p+1} = \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} C_j^N u_j^{p+1-j} \quad (5)$$

式中,  $C_j^N = \frac{N!}{(N-j)!j!}$ ;  $u_j^{p+1-j} = u \left( (p+1-j) \frac{\Delta x}{c_a}, -j\Delta x \right)$ ,  $c_a$  为指定的人工波速,  $u_0^{p+1}$  为边界点  $p+1$  时刻的波动场变量(加速度、应力、磁场强度等)值. 由于二阶 MTF 人工边界最为常用, 本文进行比较研究时采用了 MTF 人工边界的二阶形式, 其格式为(廖振鹏, 2002)

$$u(p\Delta t + \Delta t, 0) = 2u(p\Delta t, -c_a\Delta t) - u(p\Delta t - \Delta t, -2c_a\Delta t) \quad (6)$$

依据式(6)并结合选取的人工视波速  $c_a$ , 即可构造二阶 MTF 人工边界的数值算法.

## 2 速度-应力交叠解耦的混合有限元格式

本文给出的 PML 人工边界的应用和构造方法是以速度-应力弹性波动方程为基础的. 为了简便起见, 下面通过平面弹性波方程中 PML 人工边界格式的构造来说明. 该构造步骤亦可经过简单修改, 用于其它偏微分波动方程(组)的求解中. 地震波模拟的数值方法中, Virieux(1986)提出的交叠解耦时域有限差分格式应用较广, 本文沿用交叠解耦的概念, 利用混合有限元方法构造的内域算法进行研究.

### 2.1 PML 人工边界内的波动速度-应力格式

速度-应力弹性波方程组可表示为

$$\begin{cases} \dot{\rho} \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{c} : \nabla \mathbf{v} \end{cases} \quad (7)$$

初值条件为  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$  和  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x})$ .

对式(7)做时间变量  $t$  的 Fourier 变换, 将坐标变量和微分算子分别应用式(1)和式(4)的复坐标变换, 并考虑阻尼函数  $d(\xi)$ , 再通过 Fourier 逆变换, 即可得到新的控制方程组(Chew, Liu, 1996). 沿用交叠解耦的概念(Virieux, 1986), 分离变量后的 PML 内控制方程为

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + d(\xi)\right)\rho v^1 = \nabla^v \cdot \sigma & \left(\frac{\partial}{\partial t} + d(\xi)\right)\sigma^1 = c : \nabla^v v \\ \frac{\partial}{\partial t}\rho v^2 = \nabla^p \cdot \sigma & \frac{\partial}{\partial t}\sigma^2 = c : \nabla^p v \end{cases} \quad (8)$$

式中,  $d(\xi) = \lg\left(\frac{1}{R}\right)\frac{3c_p}{2\delta}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)^4$  为阻尼函数 (Collino, Tsogka, 2001);  $\nabla^v = nn \cdot \nabla$  和  $\nabla^p = (I - nn) \cdot \nabla$  为分解后的梯度算子, 分别表示垂直和平行于吸收边界的两部分;  $\delta$  为 PML 人工边界厚度;  $R$  为理论反射率;  $I$  为单位矩阵;  $n$  为吸收边界的外法向向量, 如图 1 所示. 应用交叠解耦的时域有限差分方法, 对式 (8) 中的时域和空间域微分算子进行简单的离散操作, 即可构造出 PML 的数值算法.

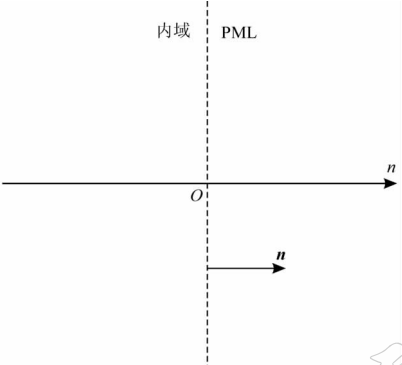


图 1 内域与 PML 分界示意图

2.2 基于场变量分解的混合有限元法

有限差分法的误差由网格结点密度和 Taylor 级数的截断误差所决定. 出于精度的考虑, 对于低阶有限差分法, 密布网格节点将导致巨大的计算量. 对大型问题, 并行计算成为唯一的解决之道, 而地震波动模拟往往问题复杂、难度较大; 对于高阶有限差分法, 自由表面或复杂结构表面导致的误差, 使得边界处的精度很难得到保证. 而另一方面, 有限单元法单元网格尺寸灵活, 能较好地处理复杂结构表面, 但时间和空间解耦困难, 解决时间依赖性较强的波动问题有一定困难. 因此, 有限差分法与有限单元法结合的混合元方法受到了越来越多的重视 (Collino, Tsogka, 2001; 李宁, 2006). 本文亦采用混合有限元方法进行研究.

3 PML 和 MTF 人工边界的比较

本文以近场脉冲型地震动输入的波动场模拟结果来比较两种边界的差异. 采用点源脉冲荷载模拟震源, 输入的脉冲荷载波形及其 Fourier 振幅谱如图 2 和图 3 所示.

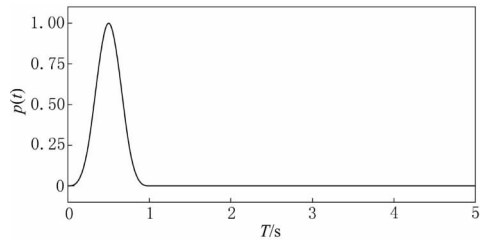


图 2 输入脉冲荷载

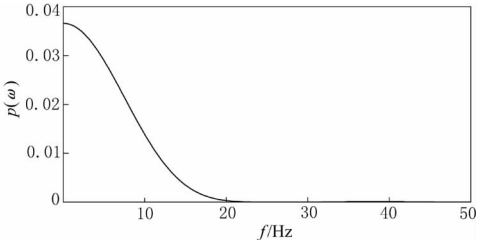


图 3 输入脉冲 Fourier 振幅谱

体波计算模型如图 4 所示. 矩形四边布置人工边界 (PML 或 MTF), 材料属性如下: 泊松比  $\nu$  为 0.25, 波速  $c_p$  为 2 000 m/s,  $c_s$  为 1 400 m/s. 采用矩形网格划分,  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  为 100 m,  $AB$ 、 $BC$  长为 10 000 m. 依据算法稳定性的必要条件, 取时间步长  $\Delta t$  为 0.02 s. 由于边界反射率与入射角度大小有关, 故在体波模拟中选择角点 ( $B$  点) 和垂直入射点 ( $A$ ,

C 点)分别考察其透射效果. 面波计算模型如图 5 所示, 两侧边和底边布置人工边界, 上表面为自由表面, 材料属性与体波模型相同. 选取距自由表面由近至远的多个点的时程考察其透射效果, 演示时程点有 3 个: D 点在自由表面, E 点、F 点距自由表面的距离分别为  $10\Delta y$  和  $40\Delta y$ . 图 4 和图 5 中的箭头分别为脉冲  $p(t)$  的加载点及加载方向.

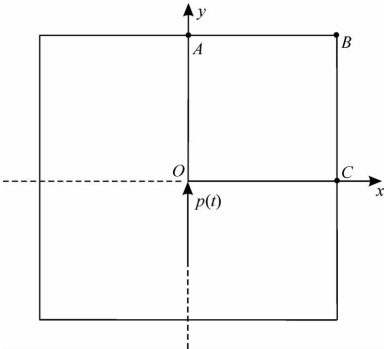


图 4 二维全空间中心输入的脉冲荷载

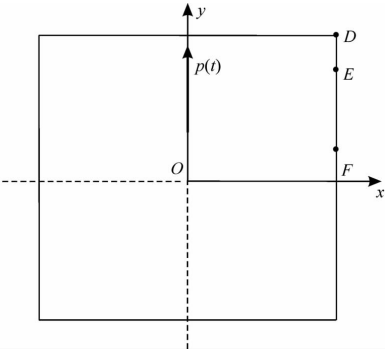


图 5 半空间近自由表面输入的脉冲荷载

3.1 对体波吸收效果的比较

分别计算边界点(A, C)和角点(B)的速度反应时程, 结果如图 6~8 所示. 从图中可以看出, 当 PML 人工边界取参数  $\delta=10$ 、 $R<10^{-2}$  时, 透射效果比 MTF 人工边界好. 由局部放大图 6b、图 7b 和图 8b 可知, PML 人工边界在相同时刻出现波形相同但峰值不同的反射波, 这是由于经过 PML 人工边界衰减的波在外边界处形成的反射波所致. 作者进行了大量数值试验. 结果表明, 若增加层厚  $\delta$ , 反射峰值将滞后, 当参数  $R<10^{-6}$  时, PML 人工边界的解与解析解几乎完全吻合. 当内域算法稳定时, PML 人工边界也稳定. 也就是说, PML 人工边界的稳定性较好. 因为仅控制内域算法稳定即可同时保证 PML 人工边界稳定.

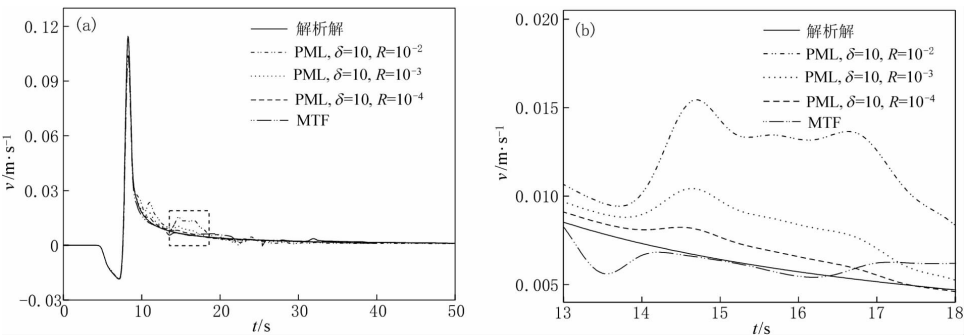


图 6 A 点的时程曲线. (a) 时程曲线; (b) 图(a)中虚线框内放大的时程曲线

为定量对比两种边界对体波透射效果的差异, 采用数值解与解析解的最大绝对误差作为衡量指标. 数值试验结果表明参数  $R$  的影响较显著. 取  $R$  的值为  $10^{-1} \sim 10^{-8}$ , 固定  $\delta$  为 10, 计算所得的数值解与解析解的最大绝对误差如表 1 所示.

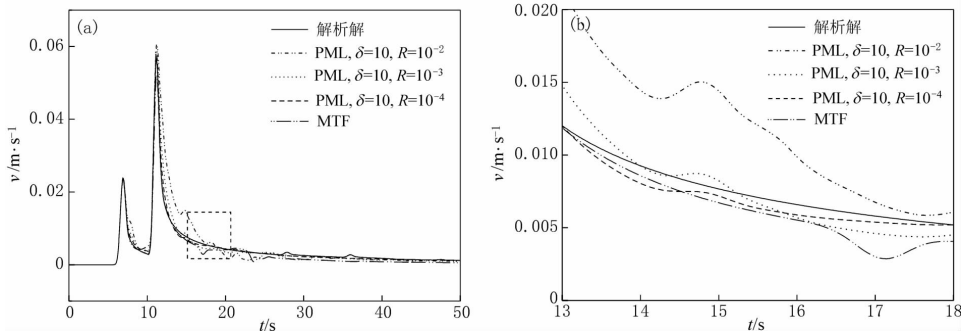


图 7 B 点的时程曲线. (a) 时程曲线; (b) 图(a)中虚线框内放大的时程曲线

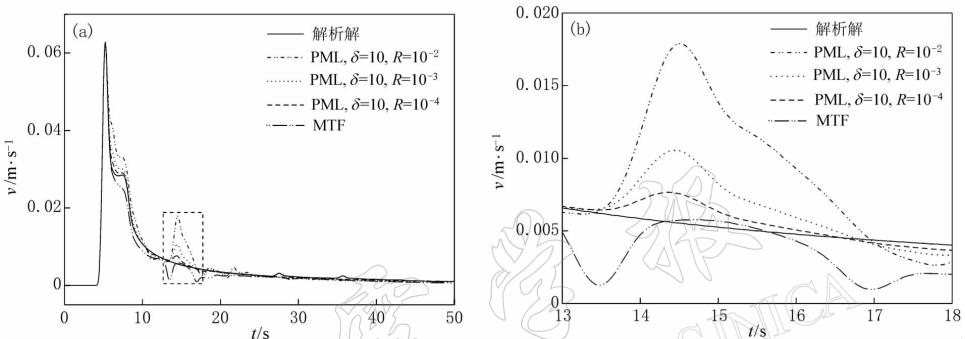


图 8 C 点的时程曲线. (a) 时程曲线; (b) 图(a)中虚线框内放大的时程曲线

表 1 体波透射时 A, B, C 点数值解与解析解误差最大绝对值

人 工 边 界	A 点 $v_x$	B 点 $v_x$	C 点 $v_x$	A 点 $v_y$	B 点 $v_y$	C 点 $v_y$	
MTF	0.0062	0.0079	0.0042	$2 \times 10^{-4}$	$9 \times 10^{-4}$	0.0055	
PML	$R=10^{-1}$	0.0161	0.0233	0.0124	0.0019	0.0019	0.0127
	$R=10^{-2}$	0.0069	0.0104	0.0049	$6 \times 10^{-4}$	$6 \times 10^{-4}$	0.0043
	$R=10^{-3}$	0.0030	0.0047	0.0020	$2 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-4}$	0.0015
	$R=10^{-4}$	0.0013	0.0021	$9 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$
	$R=10^{-5}$	$6 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-4}$	$<1 \times 10^{-4}$	$<1 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-4}$
	$R=10^{-6}$	$3 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-4}$	$<1 \times 10^{-4}$	$<1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$
	$R=10^{-7}$	$1 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$<1 \times 10^{-4}$	$<1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$
	$R=10^{-8}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$<1 \times 10^{-4}$	$<1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$

由表 1 可知, MTF 人工边界对体波透射的误差大致与当  $R=10^{-2}$ 、 $\delta=10$  时, 由 PML 人工边界计算所得误差相近. 当垂直入射时, MTF 人工边界的误差约为入射波幅值的 9%, 45°入射时, 角点处的误差约为 6.7%(几何阻尼影响); PML 人工边界在取  $R=10^{-4}$ 、 $\delta=10$  时, 垂直入射误差仅为 2%左右, 45°入射误差约为 1.8%. 当  $R<10^{-6}$  时, PML 全域误差仅在 0.5%以内. 由时程分析可知, 透射效果的差异是由于 PML 与 MTF 人工边界产生反射的因素不同. PML 误差主要是外边界边值条件所致, 而 MTF 则是平面波假定与真实波速的误差以及使用多项式外推产生的误差.

3.2 对面波吸收效果的比较

本文采用的面波模型如图 5 所示. 通过调整 PML 人工边界的两个控制参数(层厚  $\delta$  和控制变量  $R$ )组合以及 MTF 人工边界, 计算两种边界上不同深度处点的反应. 其速度时程结果如图 9~11 所示.

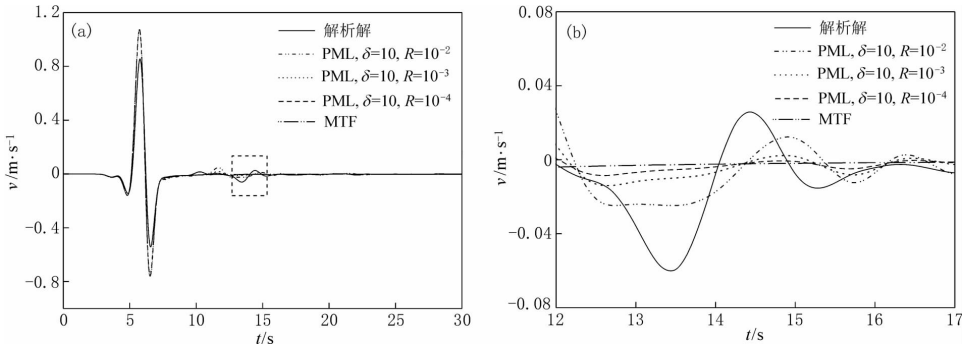


图 9 D 点的时程曲线. (a) 时程曲线; (b) 图(a)中虚线框内放大的时程曲线

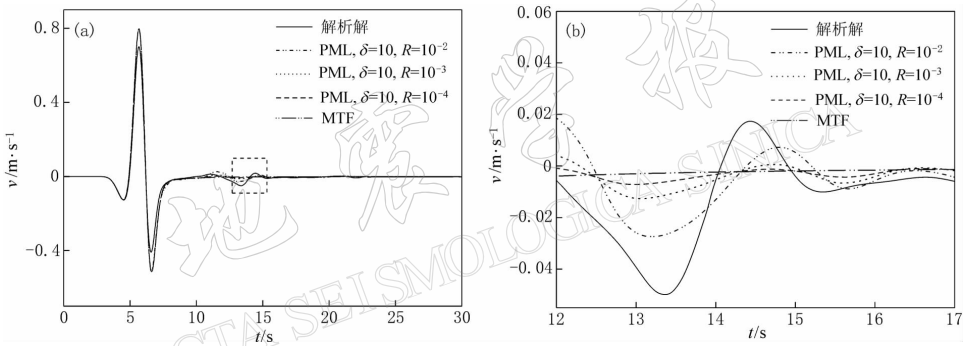


图 10 E 点时程曲线比较. (a) 时程曲线; (b) 图(a)中虚线框内放大的时程曲线

从图中可以看出, 利用 PML 和 MTF 两种人工边界计算得到的自由表面, 与边界上采样点的数值解与解析解误差均不大. PML 反射波形中, 在相同的时段呈现出波形相同的反射波峰(如图 9b, 10b, 11b 所示), 这是行波穿过 PML 人工边界至自由边界反射所致. 当  $R < 10^{-2}$ 、 $\delta = 10$  时, PML 人工边界的透射效果比 MTF 人工边界好. 当  $R < 10^{-6}$  时, PML 人工边界的解与解析解接近完全吻合, 稳定性也较好.

为定量对比两种边界对面波透射效果的差异, 仍采用最大绝对误差作为衡量指标. 取  $R$  为  $10^{-1} \sim 10^{-8}$ 、固定  $\delta$  为 10, 分别计算所得的数值解与解析解的最大绝对误差, 如表 2 所示. 由表 2 可知, MTF 人工边界对面波透射的效果较差, 在自由表面附近误差最大. 在  $h=0$  和  $h=1$  的点, 分别为 4.8% 和 4.6%. 取  $R=10^{-1}$ 、 $\delta=10$ , PML 人工边界的误差约为 3.3%. 此时 PML 面波透射性能比 MTF 人工边界优越. 随着  $h$  的增大, MTF 人工边界的透射误差值出现起伏(表 2 中黑体数值). 这表明面波随着深度增加而迅速减小, 而体波则逐渐占据优势. 当  $h$  增大至距离自由表面 40 个单元格时(远离自由表面时, 体波占优), MTF 人工边界的最大绝对误差约为 6%, 与 PML 人工边界  $R=10^{-2}$ 、 $\delta=10$  时的角点透射误差相当. 此时透射效果与上述体波中的情形基本相同.

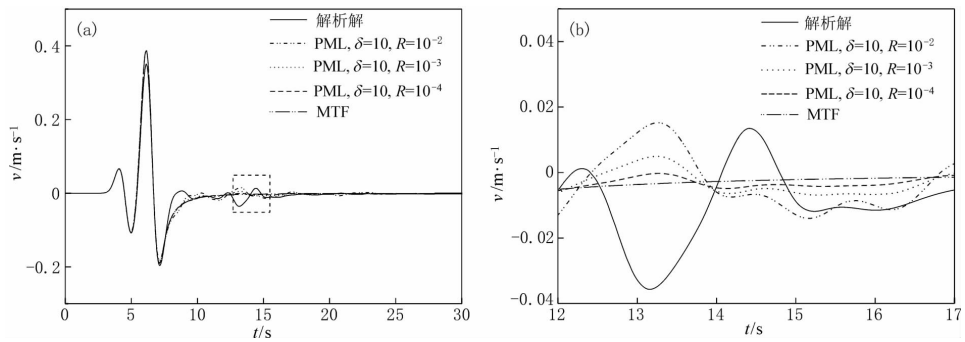


图 11 F 点时程曲线比较. (a) 时程曲线; (b) 图(a)中虚线框内放大的时程曲线

表 2 面波透射中距表面不同距离处点的数值解与解析解误差最大绝对值

人 工 边 界	$h=0^*$	$h=1$	$h=5$	$h=10$	$h=20$	$h=40$	
MTF	0.0286	<b>0.0262</b>	<b>0.0078</b>	<b>0.0104</b>	0.0085	0.0047	
PML	$R=10^{-1}$	0.0231	0.0194	0.0090	0.0183	0.0175	0.0140
	$R=10^{-2}$	0.0096	0.0082	0.0030	0.0045	0.0046	0.0054
	$R=10^{-3}$	0.0041	0.0035	0.0013	0.0020	0.0020	0.0022
	$R=10^{-4}$	0.0018	0.0015	$6 \times 10^{-4}$	$9 \times 10^{-4}$	$9 \times 10^{-4}$	$9 \times 10^{-4}$
	$R=10^{-5}$	$8 \times 10^{-4}$	$7 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$
	$R=10^{-6}$	$3 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-4}$
	$R=10^{-7}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$
	$R=10^{-8}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$

注:  $h$  为距离自由表面深度.

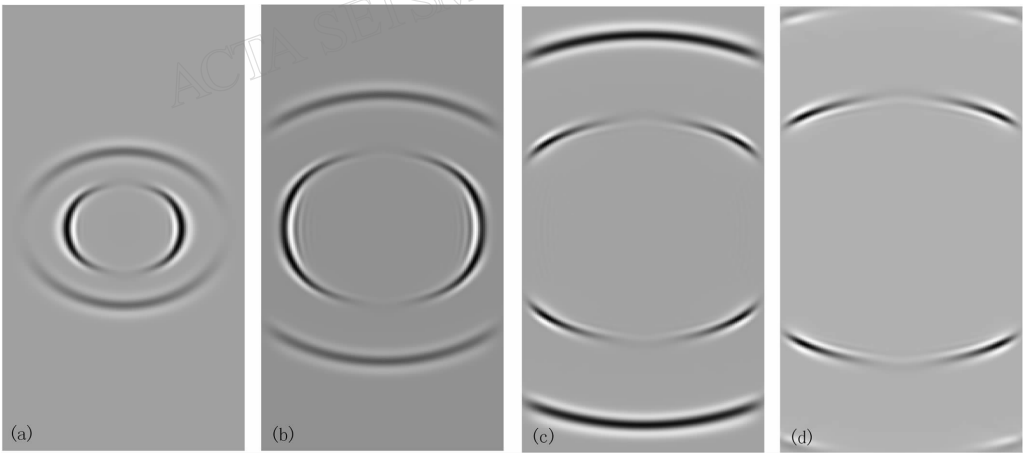


图 12 PML 人工边界对大角度入射波的反射波场  
(a) 3 s 时刻; (b) 5 s 时刻; (c) 8 s 时刻; (d) 10 s 时刻

3.3 大角度入射情况

使用 PML( $R=10^{-2}$ ,  $\delta=10$ )和 MTF 人工边界对大角度入射模拟的波场见图 12 和图 13. 由图 13 可见, 当波前传播至 MTF 人工边界时, 大角度/掠入射波产成显著的反射波, 经垂直相邻的 MTF 人工边界透射后波动幅值虽有所减小, 但反射波仍清晰可见. 当采用



PML 人工边界时(图 12), 大角度/掠入射波的反射波几乎不可见. 其透射效果比 MTF 人工边界明显较好.

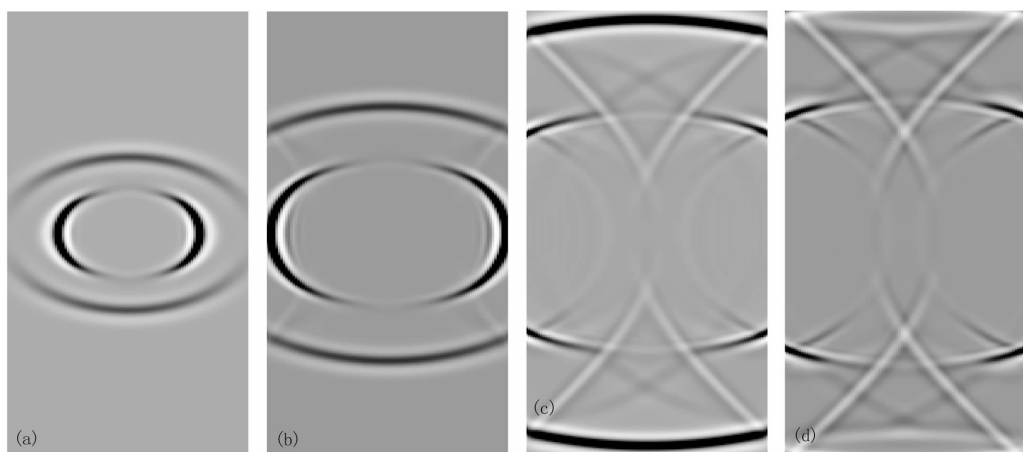


图 13 MTF 人工边界对大角度入射波的反射波场

(a) 3 s 时刻; (b) 5 s 时刻; (c) 8 s 时刻; (d) 10 s 时刻

### 3.4 两种人工边界的运算效率

对 PML 运算率的考虑, 主要是特定阻尼函数  $d(x)$  的处理. 由于 PML 人工边界单元与内域单元的算法相同, 而阻尼  $d(x)$  是在形成单元刚度时, 就构造在单元的材料属性中, 故几乎没有增加运算量. 但 PML 人工边界需增加若干层(常取 5~20 层)单元, 随着层数和空间维数的增加以及材料非线性等问题的考虑, 运算效率会有所降低. 但与内域计算量相比, PML 单元的计算量很小, 对整体运算效率影响不大. 并且在非线性波动模拟中, PML 人工边界仍可采用线弹性算法, 此时 PML 人工边界的运算量将进一步减小. 在本文算例中, 在确保解答精度要求的前提下, PML 人工边界比 MTF 方法的运算量增加了约 20%, 这是可以接受的. 计算量虽然稍有增大, 但精度和稳定性却可以提高很多. 计算量增加约 10%, 误差可以减少一个数量级, 这种性能是其它方法所不具备的.

## 4 结论

本文给出了 PML 人工边界的数学解释及其相应的构造方法. 在此基础上, 将 PML 人工边界与模拟地震波动的速度-应力混合有限元格式相结合, 实现了 PML 人工边界应用于体波和面波的模拟, 进一步比较了 PML 和 MTF 人工边界应用于源问题中各自的特点. 对两种人工边界的数值反射进行了比较, 得到以下结论.

1) 两种人工边界造成反射误差的主要原因不同, PML 人工边界主要是外侧边界的反射误差, 而 MTF 人工边界则主要是由于平面波视波速假定及外推多项式逼近导致的误差. PML 人工边界与内域交界面的匹配更好.

2) PML 人工边界在近场波动数值模拟中吸收效果较好, 在精度和稳定性要求不变且运算量不增加的情况下, MTF 人工边界对体波的吸收效果与当  $R=10^{-2}$ 、 $\delta=10$  时的 PML 人工边界的吸收效果相近, 对面波的吸收效果与当  $R=10^{-1}$ 、 $\delta=10$  时的 PML 人工边界的效果相近.

3) PML 人工边界通过调整参数可实现更好的吸收效果和精度, 因此 PML 的应用更加灵活. 文中给出的 PML 人工边界对体波透射和面波透射情况的误差值, 可作为边界误差估计时的参考.

4) 本文算例中, PML 人工边界没有出现 MTF 人工边界中常出现的失稳和漂移等不良反应, 故 PML 人工边界具备较好的稳定性, 且运算量未显著增大.

需说明的是, 本文的比较是基于统一内域算法给出的, 数值反射的定量方法是完全相同的, 所得出的结论有一定代表性和参考价值. 对于 PML 和 MTF 人工边界应用中的误差估计、适用性考察、运算量估计等问题, 都可以应用本文方法定量研究. 但在其它波动方程(偏微分方程)问题求解时, 特别是基于二阶弹性动力学方程的有限元技术中应用 PML 人工边界, 其结论还有待进一步探讨.

### 参 考 文 献

- 李宁. 2006. 完美匹配层理论及其在地震波模拟中的应用[D]: [学位论文]. 哈尔滨: 中国地震局工程力学研究所: 51-56.
- 廖振鹏. 2002. 工程波动理论导论[M]. 北京: 科学出版社: 253-263.
- 张晓志. 2005. 近断层强地面运动数值模拟研究[D]. [学位论文]. 中国地震局工程力学研究所: 47-51.
- 赵海波, 王秀明, 王东, 等. 2007. 完全匹配层吸收边界在孔隙介质弹性波模拟中的应用[J]. 地球物理学报, **50**(2): 581-591.
- 周正华, 廖振鹏. 2001. 多次透射公式的一种稳定实现措施[J]. 地震工程与工程振动, **21**(1): 10-14.
- Basu U, Chopra A K. 2003. Perfectly matched layers for time-harmonic electrodynamics of unbounded domains: Theory and finite-element implementation[J]. *Compu Methods Appl Mech Engrg*, **192**(11-12): 1 337-1 375.
- Basu U, Chopra A K. 2004. Perfectly matched layers for transient elastodynamics of unbounded domains[J]. *Int J Numer Meth Eng*, **59**(8): 1 039-1 074.
- Bérenger J P. 1994. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves[J]. *J Comput Phys*, **114**: 185-200.
- Bérenger J P. 1996. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves[J]. *J Comput Phys*, **127**: 363-379.
- Chew W C, Weedon W H. 1994. A 3-D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates[J]. *Microw Opt Techn Let*, **13**(4): 599-604.
- Chew W C, Liu Q H. 1996. Perfectly matched layers for elastodynamics: A new absorbing boundary condition[J]. *J Comput Acoust*, **4**(4): 341-359.
- Collino F, Monk P. 1998. The perfectly matched layer in curvilinear coordinates[J]. *SIAM J Sci Comput*, **19**(6): 2 061-2 090.
- Collino F, Tsogka C. 2001. Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media[J]. *Geophysics*, **66**(1): 294-307.
- Hagstrom T, Hariharan S I. 1998. A formulation of asymptotic and exact boundary conditions using local operators[J]. *Appl Num Math*, **27**: 403-416.
- Hastings F D, Schneider J B, Broschat S L. 1996. Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation[J]. *J Acoust Soc Amer*, **100**(5): 3 061-3 069.
- Hesthaven J S. 1998. On the analysis and construction of perfectly matched layers for the linearized Euler equations[J]. *J Comput Phys*, **142**: 129-147.
- Komatitsch D, Tromp J. 2003. A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation[J]. *Geophys J Int*, **154**: 146-153.
- Liao Z P, Wong H L. 1984. A transmitting boundary for the numerical simulation of elastic wave propagation[J]. *Soil*

*Dyn Earthq Eng*, **3**(4): 174-183.

Liu Q H, Tao J. 1997. The perfectly matched layer (PML) for acoustic waves in absorptive media[J]. *J Acoust Soc Amer*, **102**(4): 2 072-2 082.

Qi Q, Geers T L. 1998. Evaluation of the perfectly matched layer for computational acoustics[J]. *J Comput Phys*, **139**: 166-183.

Virieux J. 1986. P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite difference method[J]. *Geophysics*, **51**: 889-901.

Zeng Y Q, He Q E, Liu Q H. 2001. The application of the perfectly matched layer in a numerical modeling of wave propagation in poroelastic media[J]. *Geophysics*, **66**(4): 1 258-1 266.

## COMPARISON OF PERFECTLY MATCHED LAYER AND MULTI-TRANSMITTING FORMULAR ARTI- FICIAL BOUNDARY CONDITIONS BASED ON HYBRID FINITE ELEMENT FORMULATION

Li Ning<sup>1)</sup> Xie Lili<sup>1,2)</sup> Zhai Changhai<sup>1)</sup>

1) School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150090, China

2) Institute of Engineering Mechanics, China Earthquake Administration, Harbin 150080, China

**Abstract:** The theory of perfectly matched layer (PML) artificial boundary condition (ABC), which is characterized by absorption any wave motions with arbitrary frequency and arbitrarily incident angle, is introduced. The construction process of PML boundary based on elastodynamic partial differential equation (PDE) system is developed. Combining with velocity-stress hybrid finite element formulation, the applicability of PML boundary is investigated and the numerical reflection of PML boundary is estimated. The reflectivity of PML and multi-transmitting formula (MTF) boundary is then compared based on body wave and surface wave simulations. The results show that although PML boundary yields some reflection, its absorption performance is superior to MTF boundary in the numerical simulations of near-fault wave propagation, especially in corner and large angle grazing incidence situations. The PML boundary does not arise any unstable phenomenon and the stability of PML boundary is better than MTF boundary in hybrid finite element method. For a specified problem and analysis tolerance, the computational efficiency of PML boundary is only a little lower than MTF boundary.

**Key words:** perfectly matched layer; multi-transmitting formula; elastodynamic wave; artificial boundary; hybrid finite element