

富里叶本征变换的数值方法研究及其 在地震序列谱分析中的应用^{*}

陈 兵¹⁾ 郑治真²⁾ 江在森¹⁾

1) 中国西安 710054 国家地震局第二地形变监测中心

2) 中国北京 100045 国家地震局地震数据信息中心

摘要 对富里叶本征变换(FET)的数值方法进行了初步探讨,详细分析了本征基——厄米函数的数值特性.采用非等间隔采样的高斯-厄米积分法计算本征系数 a_n ,取得良好结果.通过对基本信号函数幅频特性的讨论,证明本文所采用的数值方法具有精度高,计算量小的特点.最后,利用本方法对地震活动性资料进行拟实时 FET 分析,初步探讨了 FET 应用于地震预报工作的可行性,具有一定的实用价值.

主题词 地震序列 富里叶本征变换 高斯-厄米积分 截止点 拟实时谱分析

引言

频谱分析是研究时间序列数字信号的基础,它通过对信号进行富里叶变换,将时域信号转换到频域中得到谐波分量及特征参数.

传统的波谱分析通常采用快速富里叶变换(FFT).它是针对离散富里叶积分的有效算法,目前已达到硬件化水平,臻于完善.但该方法要求采集大量的样本点,计算量较大,且只能得到离散结果.因此,其它的谱方法亦在探索中.

陈绍汀和韩海潮(1987)提出了一种求富里叶变换的新方法,即所谓的富里叶本征变换——FET.本文就是对该方法的数值方法进行初步讨论,并将其应用到地震活动性资料分析中.

1 富里叶本征变换基本理论

富里叶本征变换(Fourier eigen transformation, FET)的理论基础是建立在特殊函数——厄米正交、完备函数系对富里叶变换的形式不变性上.厄米函数表达通式为

$$\varphi_n(t) = H_n(t)e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (1)$$

其形态如图 1 所示,式中 $H_n(t)$ 为厄米多项式

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}) \quad (2)$$

^{*} 1996-08-02 收到初稿,1997-04-18 收到修改稿并决定采用.

它满足厄米方程

$$\frac{d^2 \varphi_n}{dt^2} - (t^2 + 1)\varphi_n + 4\alpha(n+1)\varphi_n = 0 \quad (3)$$

而该方程是由富里叶本征方程

$$\mathcal{F}[\varphi(t)] = \Phi(\omega) = \lambda\varphi(\omega) \quad (4)$$

推演而来的(陈绍汀, 韩海潮, 1987).

由富氏算子 \mathcal{F} 的幂等性知 $\lambda = 1$,

$-j, -1, j(j = \sqrt{-1})$

其中, 每一个根均为可列无穷重重根,

记为

$$\lambda_n = (-j)^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

则有

$$\mathcal{F}[\varphi_n(t)] = \lambda_n \varphi_n(\omega) = (-j)^n \varphi_n(\omega) \quad (5)$$

这就是厄米函数对富里叶变换的形式不变性. 可以看出, $\varphi_n(t)$ 和 $\varphi_n(\omega)$ 在形式上是一致的. 利用这一特性, 富里叶积分可以转化为一个函数的特征值问题.

利用正交、完备的函数系 $\varphi_n(t)$ 为基底构成函数空间, 将信号函数 $f(t)$ 在厄米空间中作广义富里叶展开

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(t) \quad (6)$$

对其进行富里叶变换则得到

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n \alpha_n \varphi_n(\omega) \quad (7)$$

成为一个加权多项式的和, 因而是 ω 的连续函数.

可以看出, FET 方法在形式上是很巧妙的, 它将富里叶变换中的积分运算转化为求和运算. 简化了计算过程. 现在, 如何以较小的计算量获得高精度的求和系数 a_n , 就成为 FET 方法是否具有实用价值的关键.

2 系数 a_n 的计算方法及结果

2.1 厄米函数性质

下面我们再分析厄米基底函数的性质. 作为正交函数系的一员, 厄米函数除了它的正交、完备性之外, 还有下面几个与本工作直接相关的特性:

(1) 奇偶性: (略).

(2) 零点特性: (略).

(3) 低阶衰减性: $\varphi_n(t)$ 是振荡衰减函数. 由于衰减因子 $e^{-\frac{t^2}{2}}$ 的作用, $\varphi_n(t)$ 的存在区间是有限的, 且随着阶次 n 的增大而扩展, 这一现象可用截止点的概念来描述.

(4) 截止点: 就给定的一个 $\varphi_n(t)$ 而言, 对于任意小的一个正数 ϵ , 我们总可以找到一个 t_n^* , 使得 $|t| > t_n^*$ 时, 有 $|\varphi_n(t)| \leq \epsilon$, t_n^* 即定义为截止点. 称为 n 阶厄米函数 $\varphi_n(t)$ 的截止点

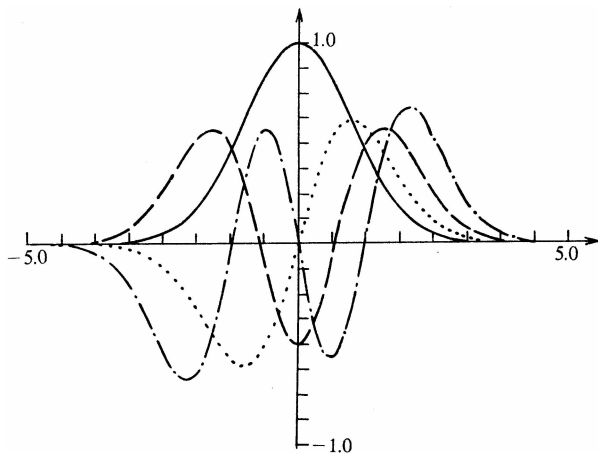


图 1 厄米函数形态

t_n^* .

由定义可知, 对 $|t| < t_n^*$, $\varphi_n(t)$ 能够对广义富氏展开

$$f(t) = \sum_{n=0}^N \alpha_n \varphi_n(t) \tag{8}$$

的拟合效果做出贡献. 而当 $|t| > t_n^*$ 后, 则认为 $\varphi_n(t)$ 不再起作用, 这会造成两种后果: ① 不同的 $\varphi_n(t)$, 其截止点亦不同, 且 t_n^* 随 n 增大而增大; ② 由于 N 的取值会随着 t 的增大而增大, 因此会造成计算量增加. 这就要求在选择积分法时要尽可能采用同样精度下计算量较小的算法.

2.2 计算方法

由高斯型求积公式知, 利用 n 个不等间距节点 $t_1, t_2, \dots, t_n \in [a, b]$ 对函数 $f(t)$ 进行插值计算积分, 则有

$$\int_a^b p(t) f(t) dt = \sum_{k=1}^n A_k f(t_k) + R[f] \tag{9}$$

余项

$$R[f] = \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^b p(t) W_n(t) g_k(t) dt \tag{10}$$

节点取为正交多项式 $g_n(t)$ 的根, 则有

$$R[f] = 0$$

此时, 式(7)代数精度可达 $2n+1$ 阶次, 比一般求积公式高了近乎一倍, 而计算量则相对较小.

综上所述, 我们决定选取非等间隔采样的高斯-厄米积分法计算系数 a_n .

2.3 公式推导

无穷区间上高斯-厄米积分公式为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} dx = \sum_{k=0}^m W_k f(x_k) \tag{11}$$

其中, x_k 为 m 次厄米多项式的根

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} (e^{-x^2}) \tag{12}$$

系数和余项为(李岳生, 黄友谦, 1978)

$$W_k = \frac{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}}{[H'_m(x_k)]^2} \tag{13}$$

$$R[f] = \frac{m! \sqrt{\pi}}{2^m (2m)!} f^{(2m)}(\xi) \tag{14}$$

本征系数

$$a_n = \frac{2^n}{n! \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t) dt = \frac{2^n}{n! \sqrt{\pi}} I_n \tag{15}$$

做变换

$$t = \sqrt{2} x$$

$$I_n = \int_0^{\infty} f(\sqrt{2} x) H_n(\sqrt{2} x) e^{-x^2} d(\sqrt{2} x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=0}^m f(\sqrt{2} x_k) H_n(\sqrt{2} x_k) W_k \tag{16}$$

$$W_k = \frac{m!\sqrt{\pi}}{(m+1)2^m \cdot H_m^2(x_k)}$$

(17)

由于 $f(x)$ 是有限区间信号，须设

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < X \\ 0 & x > X \end{cases}$$

式中， X 为信号长度. 另一方面，由于衰减性，使 $\varphi_n(x)$ 的存在区间有限. 由信号分析采样定理知，采样间隔

$$\Delta x \leq \frac{1}{2f_{\max}}$$

采样长度 $X = \Delta x \cdot N_p$ ， N_p 为样本点数.

若取 $f_{\max} = 500 \text{ Hz}$ ， $N_p = 4\,096$ ，则

$$\Delta x = 0.001, X = 4(\text{s})$$

与 $\varphi_{20}(x)$ 的 x_{20}^* 相近. 可知， I_n 形式上是无穷积分，而实质上是在有限区间 $[O, R]$ 上进行的， R 即为 $\varphi_n(x)$ 的截止点 x_n^* . 因而，自然地降低了积分区间的截断误差和计算量.

2.4 数值结果

我们编制了积分与本征变换程序，并选取两类常用的曲线拟合基底函数进行了计算. 结果见表 1 和表 2. 由此可得到以下结论：

表 1 幂函数本征系数计算结果

n	$\int_0^\infty t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$			$\int_0^\infty t^{2n+1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$		
	精确解	数值解	误差	误差	数值解	精确解
1	1.253 314 137	1.253 314 700	0.000 049 9%	0.421 13%	1.991 577 4	2.0
2	3.759 942 412	3.759 943 000	0.000 015 6%	0.070 715%	8.005 657 2	8.0
3	18.799 712 06	18.799 793 00	0.000 430 5%	0.018 072 9%	47.991 325	48.0
4	131.597 984 4	131.590 000 0	0.000 771 7%	0.007 804 7%	384.028 87	384.0
5	1 184.381 860	1 184.389 900	0.000 678 8%	0.003 317%	3 839.872 6	3 840.0
6	13 028.200 46	13 028.197 00	0.000 026 5%	0.003 882 4%	46 081.789	460 86
7	169 366.605 9	169 366.560 0	0.000 027 1%	0.005 678%	645 083.37	645 120
8	2 540 499.089	2 540 489.500	0.000 023 2%	0.015 404%	10 323 510	10 321 920
9	43 188 484.52	43 188 480.00	0.000 010 5%	0.140 886 8%	185 532 800	185 794 560
10	820 581 205.8	816 045 570.0	0.552 734 5%	1.416 914 5%	3 663 240 200	3 715 891 200

表 2 三角函数本征系数计算结果

b	$\int_0^\infty \cos(bt) e^{-\frac{t^2}{2}} dt$		
	精确解	数值解	误差
0.9	0.835 931 466	0.835 931 540	0.000 008 9%
1.0	0.760 173 451	0.760 173 440	0.000 001 4%
2.0	0.169 617 42	0.169 616 73	0.000 527 1%
3.0	0.013 923 042	0.013 172 811	5.388 548 9%

(1) 对幂函数，总体效果相当好，即使当 $n=10$ 时，幂级数达到 20 次方，积分误差亦不超过 1.5%.

(2) 偶函数计算结果比奇函数要好得多. 对于正弦函数, 当 $b=0.9$ 时有

精确解	数值解	误差
0.692 192 857	0.731 642 01	6.699 156 3%

误差已与 $b=3.0$ 时的余弦函数 $\cos b(t)$ 相当.

造成这种差别的原因在于高斯-厄米求积公式中求积系数具有加权求和的性质. 由于篇幅所限, 在此不作赘述.

从上表还可看出, $b<1$ 时, 结果精度很好; 而 $b=3$ 时, 误差达到 5%. 原因在于 $\varphi_n(x)$ 作用区间有限. 本文程序仅采用前 10 项厄米多项式的零点及其求积系数进行计算, 当 $b=3$ 时, 最大节点大于 3 的仅有 9, 10 两阶函数. 当采用 $H_{10}(x)$ 节点及系数计算时, 仅有 3.043 615 91 一个节点大于 3, 节点过少造成拟合精度下降; 当 $b=4$ 时, 结果完全失真. 因为此时已无大于 4.0 的节点可供拟和.

3 幅频特性分析

利用 a_n 可得到富氏本征谱

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^N (-j)^n a_n \varphi_n(\omega)$$

(18)

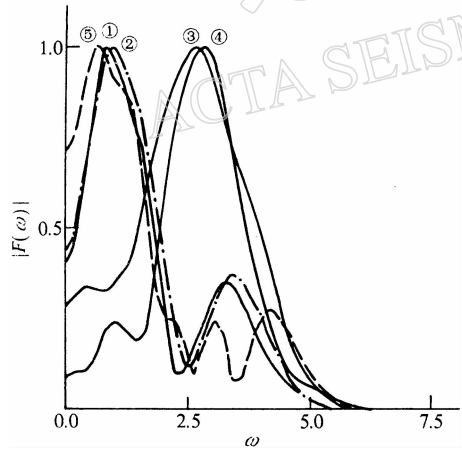


图 2 基本信号函数幅频特性
① $f(t)=\cos(0.9t)$, $N=10$; ② $f(t)=\cos(1.0t)$, $N=10$; ③ $f(t)=\cos(3.0t)$, $N=10$; ④ $f(t)=\cos(3.0t)$, $N=14$; ⑤ $f(t)=\sin(0.9t)$, $N=14$

我们将幅频曲线示出(图 2), 以供分析比较. 由图可知, $\omega<1$ 时, 仅取 $N=10$, 幅频特性已相当好, 误差不超过 2%. 而当 $\omega=3$ 时, 则误差激增至 12%, 若提高拟和阶次, 取 $N=14$, 此时误差降至 1.6%. 由此可知, 高斯-厄米方法处理低频信号效果很理想, 对低中频信号, 可适当提高 N 值, 增加 a_n 以改善精度. 至于高频信号, 根据不同类型可作如下设想:

3.1 高频、窄带宽信号

利用富氏变换移频特性(郑治真, 1983)

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_k t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_k)t} dt =$$

$$F(\omega-\omega_k) = \sum_{n=0}^N (-j)^n a_n \varphi_n(\omega-\omega_k)$$

(19)

建立关于 $\omega'=\omega-\omega_k$ 的计算模式, 从而利用有限项低阶次 a_n 和逼近 $F(\omega)$, 使计算量及截断误差控制在低水平上.

3.2 高频、宽带信号

可以进行分段拟和, 即在不同区间段上采用不同阶的 $\omega_n(t)$ 进行拟和, 以便减少拟和所需项数, 在保证精度的前提下减少计算量. 实际计算时, 应根据具体数据选择比较, 以期获得最佳效果.

4 地震序列谱分析

(1) 从前述资料分析中可以看出，FET 仍然属于稳态分析(纯频域分析)的范畴。为了得到随时间变化的频率特征，我们采用所谓的“拟实时 FET 技术”，即将一段连续数据分割成相互连接而又彼此独立的小时段数据。在每一小段上进行 FET 变换，然后再将每一段上的结果作为时间的因变量，这样我们得到了一个近似实时的时-频关系，并可根据这一特性的变化来分析它的地震学含义。

区域地震活动性的计算是在祁连山断裂附近西至玉门、东至景泰，北至金昌、南至刚察的一条状区域上进行的，以零级以上地震的频次为原始数据。时间为 1980 年~1992 年 10 月，每 1 年做 1 次 FET 变换，每月频次作为一个采样点，12 个点作 3 次多项式拟合然后再插值采样。处理结果如图 3。

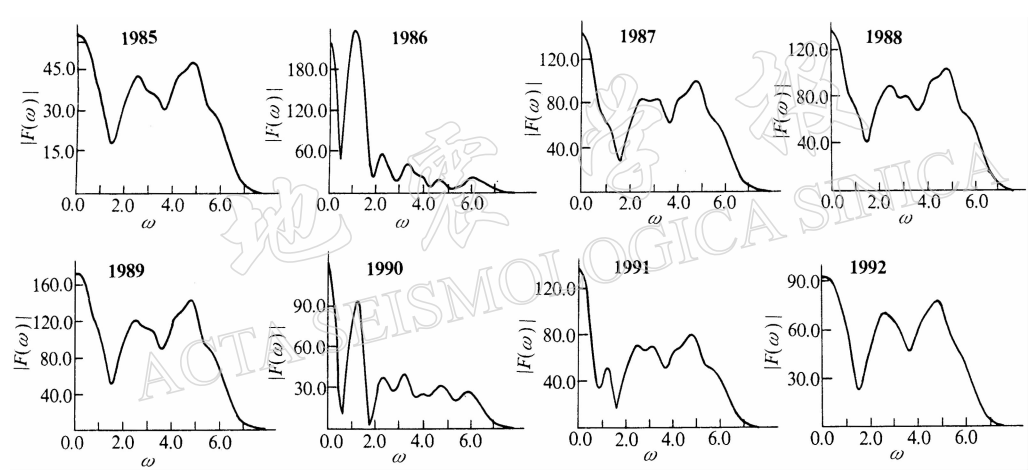


图 3 祁连山断裂周边地区地震活动拟实时 FET 图

可以看出，在正常年份，频谱结构基本保持不变，且峰值频率稳定在 $\omega_1 = 2.45$ 及 $\omega_2 = 4.85$ 处。而 1986，1990 两年频谱特性变化巨大，峰值频率 ω_1 移动到 1.1 处左右，且与 ω_2 合二为一，频率较正常年份大幅减小，而恰在这两年，区域内发生了门源 6.4 级和景泰 6.2 级两次中强地震。

时间域数据间隔 t 缩短了，而频域中 ω 也缩小。这是否矛盾呢？实际上，频率分析的目的是要找出原始数据序列所反映出的变化趋势，即整体或瞬时周期而非数据采样间隔。大震前后相对集中的地震簇反映了基本平均分布的时间序列的一个奇点，这种奇点出现的频率相对很低，换言之，两个奇点之间的间隔较之正常的点之间的间隔要长得多。这就是为什么当一段数据中包含这样一个奇点时，会造成整个频谱结构的改变：频率减小，周期变长。从频谱图中可以看出，地震之后频率变化很大，频谱曲线存在一个恢复期，经过 1~2 年的调整才逐渐回归到正常形态，这种情况是很容易用前述分析来解释的。需要说明的是，以地震频次为样本，大震依据小震的数量增大自己的权重，而以地震能量释放率为原始数据序列，大震则以能量增大自己的权重，两者的结果是并行不悖的。

(2) 预报意义。从前述分析可以看出，实时频率曲线对于地震的发生具有良好的相关

性. 中强地震的发生造成相应的原始数据链的信息发生了质的变化. 在其发生的相应时段内, 频率均会有所改变, 而且每次改变的形态很相似, 似乎存在着一定规律可循. 这一点为提取前兆预报指标, 将 FET 方法应用于预报打下了良好的基础. 如果缩短时段长度, 会得到更细致的时频关系. 但这需兼顾数据长度的问题. 所以将这一方法用于实时预报还存在一定的距离. 因此, 如何有效地模拟真实的时-频曲线, 将是我们今后研究的重点, 也是将 FET 用于实际地震预报的关键所在.

5 结论

总结前述工作, 并与 Simpson 和 Romberg 等方法进行比较, 高斯-厄米积分法具有如下优点:

(1) 代数精度高. 拟和余项

$$R[f] = \frac{m! \sqrt{\pi}}{2(2m)!} f^{(2m)}(\xi) \quad -\infty < \xi < \infty \quad (20)$$

当 m 增大时, $R[f]$ 迅速衰减, 具有非常好的拟和性质.

(2) 计算量小. 因为积分时只用到 $H_m(t)$ 的 m 个节点, 而当 m 不大时即可获得良好精度, 只需 m 次算术运算, 计算量与 Romberg 法相比很小, 精度却相当.

(3) 由于求积系数非负, 数值结果较为稳定.

本文得到徐辉教授的诸多指导, 张凯同志也参加了部分工作, 在此表示感谢.

参 考 文 献

- 陈绍汀, 韩海潮, 1987. 富里叶本征变换 FET. 应用力学学报, 4(1): 33~37
李岳生, 黄友谦, 1978. 数值逼近. 北京: 人民教育出版社. 217~231
郑治真, 1983. 波谱分析基础. 北京: 地震出版社. 27~32