

文章编号: 0253-3782(2000)04-0410-08

# 地震多重分形计算的最小生成树法<sup>\*</sup>

朱令人 龙海英

(中国乌鲁木齐 830011 新疆维吾尔自治区地震局)

**摘要** 目前地震分形计算的方法很多, 但各方法或多或少都存在一些问题。本文引入一种地震分形计算的新方法——最小生成树法(minimal spanning tree), 对其算法作了重要的修改, 并通过对乌什、乌苏、唐山和海城 4 个区域震例的研究, 得出大震前后地震时空分布多重分形谱由集中变疏张, 反映了分形结构复杂性的增加、地震时空分布不均匀性的增加。由点集的数值模拟表明: 强震前后多重分形谱变化的物理本质是地震分布由均一到不均一, 由简单到复杂的变化过程。

**关键词** 地震分形 最小生成树 多重分形谱

**中图分类号:** P315.08      **文献标识码:** A

## 引言

地震是地壳运动和岩石破裂的结果, 是一种失稳和自组织临界现象。这类现象只可能发生在非线性系统中。分形作为非线性科学的一个部分, 自从 1977 年 Mandelbrot 创建以来, 它为处理非均匀性和复杂现象开辟了新的思路, 提供了新的工具。一些看起来似乎杂乱无章, 使人们难以处理的复杂的自然或社会现象, 通过对它们的分形研究已初步揭示出其内在的规律。

地震作为地壳内的大尺度破裂被认为是分形的, 具有分数维的特征。目前计算地震分形的方法很多, 但主要有数盒子法、固定半径法、推广的 G-P 法以及固定质量法。数盒子法是计算地震分形比较简单和直观的方法, 但它存在一些缺点: ① 样本量要求高; ② 对尺度的选择有很强的要求; ③ 对  $q < 0$  区,  $D_q$  误差很大。固定半径法与数盒子法的主要差异是: 数盒子法的元胞盒在同一尺度时, 互不重叠又全部覆盖分形集, 而固定半径法中同一尺度的分割元胞球之间可以重叠, 也可以分离。因此数盒子法的缺点对固定半径法大多存在。推广的 G-P 法实际是把分形集中的每一点都作为基准点的固定半径法, 因此它包含了固定半径法的缺点, 会出现“平台”, 且对  $q < 1$  区误差较大。固定质量法与前几种方法相比, 有一定的优点: ① 当点集较乱时, “平台”不会出现; ② 不存在起点效应; ③ 对  $q \leq 1$  区, 有较好的收敛性。综上所述, 取每个点作基准点的固定质量法是目前最好的方法之一。

本研究引入一种计算地震时空分布分形结构的新方法——最小生成树(minimal spanning tree, 即 MST)法。该方法是 Weygaert 等(1992)提出用来计算有限数据分维的。成都

\* 地震科学联合基金资助项目(92287)和“九七三”项目《大陆强震机理与预测》课题。  
1999-10-08 收到初稿, 2000-05-12 收到最后修改稿并决定采用。

市地震局洪时中同志随即发现并译成中文介绍给我们。本研究在原方法的基础上作了重大的修改，使它更适于计算地震时空分布的分维结构。通过对它的理论分析以及理论模型数值模拟，认为它具有一定的优点，并给出了可靠的精度估计(将另文讨论)。

## 1 多重分形计算的最小生成树法

计算点分形的集合维数时，特别是在使用实验数据和观测数据有限的情况下，通常的方法作多重维数的可靠估计就十分困难。Weygaert 等(1992)提出了一种新的多重分维计算方法——最小生成树(MST)法。我们通过对该方法的改进，认为它可以对有限点集的多重维数进行较好的估计。

### 1.1 最小生成树的原理及其构造

最小生成树是图论的一种结构。 $N$ 个点集合的 MST 是( $N-1$ )条边(每一条边连接两个点)的唯一网络，这些边确定了任意一对点之间的路径。然而所有边长之和为最小。按图论术语，最小生成树可表示如下：数据点集是一个图  $G$ ，它由顶点集合  $V$  和边集合  $E$  组成，每条边有长度或“权”，连接顶点的边的序列叫路径。一个封闭的路径称为环。如果任意一对顶点之间的路径存在，图就称为连通的。一个不含环的连通图称为生成树。树的长度定义为该组成边的最小和。MST 是长度最小的树。如图 1 为点  $A, B, C, D, E, F, G$  所构成的最小生成树。

由上所述，MST 是给定点集的唯一最小覆盖，这意味着它是一个给定点集的集合覆盖下确界概念的自然推广。

我们求最小生成树采用的是 Prim 算法。假设  $G = (V, E)$  是连通网络，为简单起见，我们用序号 1 至  $n$  来表示顶点集合，即  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 。设所求的最小生成树为  $T = (U, TE)$ 。其中， $U$  是  $T$  的顶点集， $TE$  是  $T$  的边集，并且将  $G$  中边上的权看做是长度。

Prim 算法的基本思路是：首先，从  $V$  中任意取一个顶点  $u_0$ ，将生成树  $T$  置为仅有一个节点  $u_0$  的树，即  $U = \{u_0\}$ ；然后只要  $U$  是  $V$  的真子集，就在所有那些某一个端点  $u$  已在  $T$  (即  $u \in U$ )、另一个端点  $v$  还未在  $T$  (即  $v \in V - U$ ) 的边中，找一条最短(即权最小)的边  $(u, v)$ ，并把该条边  $(u, v)$  和其不在  $T$  中的顶点  $v$ ，分别并入  $T$  的边集  $TE$  和顶点集  $U$ 。如此进行下去，每次往生成树里并入一个顶点和一条边，直到把所有顶点都包括进生成树  $T$  为止。此时，必有  $U = V$ ， $TE$  中有  $n-1$  条边，MST 性质保证上述过程求得的  $T = (U, TE)$  是  $G$  的一棵最小生成树。

### 1.2 多重分形 MST 法的计算方法

在  $R^n$  中嵌入的集合  $A$  的 Hausdorff 维可以定义为，对于所有  $r_i > 0$ ， $A$  的覆盖族  $r_A^r$  由直径  $r_i < r$  的集合  $\beta_i$  组成，对于每一个子集给定一个测度  $\mu_i$  并给出其矩，我们就能定义分割函数

$$\Gamma(q, \tau) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_i \frac{\mu_i^q}{r_i^\tau} \quad \tau \leqslant 0 \text{ 与 } q \leqslant 1$$

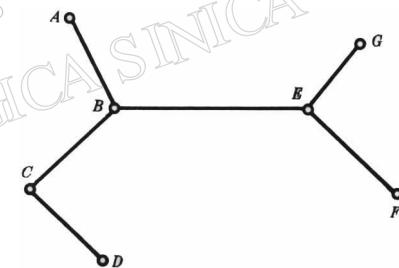


图 1 最小生成树示意图

$$\Gamma(q, \tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{r_A^{\epsilon}} \sum_i \frac{\mu_i^q}{r_i^{\tau}} \quad \tau \geq 0 \text{ 与 } q \geq 1 \quad (1)$$

令  $\Gamma(q, \tau) = \text{常数}$ , 可以得到函数  $\tau(q)$ . 显然  $q=0$  时, Hausdorff 维  $D_H = -\tau(0)$ , 同样可以由

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1} \quad (2)$$

定义 Hausdorff 广义维.

原来的数盒子法、固定半径法、固定质量法等都是广义的 Renyi 维. Renyi 维是容量维的自然推广, 而容量维与 Hausdorff 维的区别在于它的覆盖总范围是带有同一直径的集合.

在分形点集中, 按自然概率分布选择  $M$  个基准点, 设边数为  $m$ , 由某个基准点出发, 构成  $m$  条边的最小生成树, 找出此树中任意两顶点间的距离最大值, 作为标度  $L(m)$ .

定义分割函数

$$S(\tau, m) = L^{-\tau}(m) \quad (3)$$

若该值与边数的幂成正比, 我们有

$$S(\tau, m) = m^{\tau-1} \times \text{const} \quad (4)$$

对于不同的  $m$  值, 拟合标度关系

$$\lg S(\tau, m) \sim (q-1) \lg m \quad (5)$$

可得到作为  $\tau$  函数的  $q$  值. 对  $M$  个基准点可生成  $M$  个最小生成树, 取其平均值

$$\langle S(\tau, m) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M S_i(\tau, m) \quad (6)$$

代替上面式中的  $S(\tau, m)$ , 利用最小二乘法, 求出  $D_q$ . 再由

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1} \quad (7)$$

求出分形谱  $D_q$ , 此即为该点集的多重分形谱.

这种方法与原文(Weygaert *et al.*, 1992)有重要的不同之处: ① 原文是在分形点集中随机选取( $m+1$ )个点, 构成最小生成树, 而我们是在分形点集中, 选定基准点后, 由此发生长出( $m+1$ )个点的最小生成树, 且我们把每个点都作为基准点; ② 原文是把树的边长作为标度, 而我们是把最小生成树中的两点间的最大距离作为标度, 在一维情况下就是树长.

### 1.3 最小生成树的优点

最小生成树(MST)法与固定质量(MAS)法有相似之处, 对点事件来说,  $(m+1)$  个顶点就是固定质量法的质量, 不过固定质量法中的最小半径被最小生成树中的任意两顶点的最大距离所代替.

与前述的几种方法比较, MST 法有一定的优点: ① 它自动地考虑了最小覆盖; ② 不需要计算概率  $P_i$ , 避免了许多困难; ③ 对样本容量要求不是很高; ④ 与固定质量法相类似, 对  $q < 0$  区,  $D_q$  值仍然有效, 且有较高的精度; ⑤ 它不存在边界问题.

## 2 地震时空分布的分形研究

用 MST 法计算地震的时间分维值, 可把地震发生的时间作为点集  $V$ , 任意两地震时

间的差作为树的边长, 最小生成树中任意两顶点间的最大时间差作为标度; 而用 MST 法计算地震的空间分维值, 可把地震发生的地点作为点集  $V$ , 任意两地点间的距离作为树的边长, 最小生成树中任意两顶点间的最大距离作为标度.

## 2.1 地震时间分布的多重分形谱

乌什震区和乌苏震区分别位于天山地震带南北两侧. 这里强震频发, 是良好的地震预报研究实验场(表 1).

所研究的地震如下:

乌什	1987 年 1 月 24 日	$M_s 6.4$	$\varphi_N 41.45^\circ$	$\lambda_E 79.28^\circ$
柯坪	1991 年 2 月 25 日	$M_s 6.5$	$\varphi_N 41.03^\circ$	$\lambda_E 79.00^\circ$
乌苏	1990 年 10 月 25 日	$M_s 5.2$	$\varphi_N 44.23^\circ$	$\lambda_E 83.90^\circ$
乌苏	1990 年 10 月 25 日	$M_s 5.2$	$\varphi_N 44.13^\circ$	$\lambda_E 83.95^\circ$
乌苏南	1995 年 5 月 2 日	$M_s 5.8$	$\varphi_N 43.81^\circ$	$\lambda_E 84.67^\circ$

表 1 资料的选取

研究区	$\varphi_N/(\circ)$	$\lambda_E/(\circ)$	起止时段	起算震级( $M_s$ )
乌什	39.5~42.5	77.0~80.0	1982-01-01~1992-12-31	2.7
乌苏	42.5~45.0	42.0~86.5	1980-01-01~1995-04-30	2.2

下面是用最小生成树法计算地震时间分布得到的各研究区随时间变化的多重分形谱, 谱线从上至下  $q$  值分别为取为  $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

由图 2 可见, 1987 年 1 月和 1991 年 2 月两次强震前  $D_q$  曲线族出现较明显的异常: 负  $q$  区  $D_q$  上升, 正  $q$  区  $D_q$  下降, 曲线族张口,  $D_{q-q}$  曲线明显变陡.

图 3 中, 1980 年 11 月  $M_s 5.7$  地震影响了曲线开始阶段的形态. 1990 年 10 月乌苏两次  $M_s 5.2$  地震前  $D_q$  曲线反映不明显, 而 1995 年 5 月  $M_s 5.8$  地震前分形谱曲线有典型的变化.  $D_{q-q}$  曲线变陡, 负  $q$  区  $D_q$  上升, 正  $q$  区  $D_q$  下降, 临震前回返.

## 2.2 地震空间分布的多重分形谱

所研究的地震如下(表 2):

唐山	1976 年 7 月 28 日	$M_s 7.8$	$\varphi_N 39.6^\circ$	$\lambda_E 113.2^\circ$
海城	1975 年 2 月 4 日	$M_s 7.3$	$\varphi_N 40.6^\circ$	$\lambda_E 122.8^\circ$

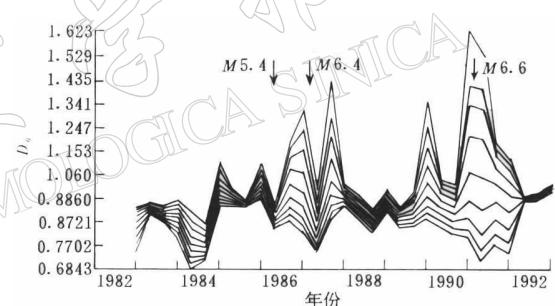


图 2 乌什研究区地震多重分形谱随时间变化曲线

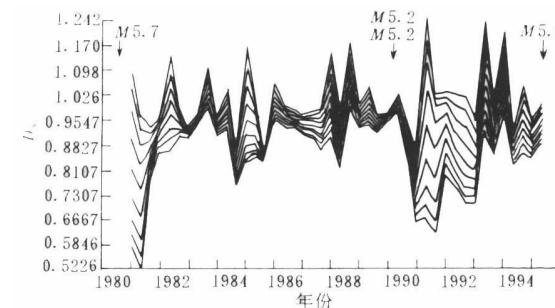


图 3 乌苏研究区地震多重分形谱随时间变化曲线

表 2 资料的选取

研究区	$\varphi_N/(\circ)$	$\lambda_E/(\circ)$	起止时段	起算震级( $M_S$ )
唐山	36.6~42.6	115.2~121.2	1972-01-01~1983-12-31	2.3
海城	37.7~43.7	119.8~125.8	1971-01-01~1982-12-31	2.0

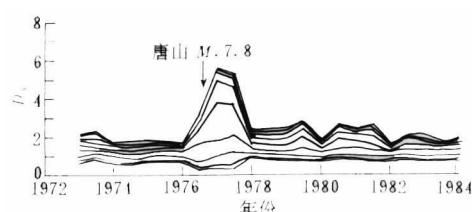


图 4 唐山研究区地震多重分形谱随时间变化曲线

极为剧烈。这个结果与李东升等(1993)、王琳瑛等(1994)的结果是一致的。

由图 5 可以看到, 海城地震前半年左右, 正  $q$  区  $D_q$  下降, 负  $q$  区  $D_q$  开始上升, 震后该区的  $D_q$  达极大值。由于海城地震的强余震非常多(包括 5 次  $M_S \geq 5.6$ ), 持续时间也长。造成分形谱一直处于疏张状态[即  $\Delta D/\Delta D = (D_q)_{\max} - (D_q)_{\min}$  很大], 很长一段时间后才逐渐恢复正常(即  $\Delta D$  变小)。

下面是用最小生成树法计算地震空间分布得到的各研究区随时间变化的多重分形谱, 谱线从上至下  $q$  值分别取为  $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 。

图 4 十分典型地表示出唐山大震前后地震空间分布多重分形的变化: 震前, 唐山研究区在正常活动时期,  $D_q$  曲线相当平稳, 但在唐山地震前, 负  $q$  区的  $D_q$  上升, 正  $q$  区的  $D_q$  微微下降; 震后, 负  $q$  区的  $D_q$  急剧上升, 变化

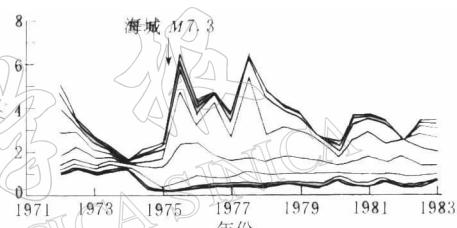


图 5 海城研究区地震多重分形谱随时间变化曲线

### 3 强震前地震多重分形谱异常的物理解释

朱令人等<sup>①</sup>(1995, 1997)通过理论分析和不同组合的一维双标度康托尔集理论模型进行论证指出, 强震前地震时间分布  $D_q$ - $q$  变陡, 说明地震分形体中包含了更多不同奇异性强度因子的子分形体, 即地震时间分布的分形结构的不均匀性增大了, 更复杂了, 更丰富了。而地震空间分布的分形结构同样存在这种变化, 即强地震发生前地震空间分布的分形维数谱出现  $D_q$ - $q$  曲线变陡[在  $f(\alpha)$ - $\alpha$  曲线上  $\alpha$  取值变宽]的异常。

下面讨论地震空间分布  $D_q$  的异常。蒋海昆等<sup>②</sup>模拟地震的空间分布, 用 Possion 过程和 Neyman-Scott 过程产生 1 000 个样本, 用数盒子法求得其  $f(\alpha)$ - $\alpha$  谱, 如图 6。同样表明空间分布随着不均匀性的增加,  $\alpha$  取值逐渐变宽, 即  $D_q$ - $q$  曲线变陡。

王琳瑛等(1994)进行丛集尺度变化试验: 在某区域上, 一部分样本均匀随机分布, 而另一部分随机样本的分布则空间尺度不断增强, 相应的稀疏部分则逐渐离散。计算结果表

① 朱令人, 周仕勇, 杨马棱, 等. 1995. 地震分形结构和多重分维的研究. 地震科学联合基金资助课题最终成果报告, 43.

② 蒋海昆, 王忠民, 郝九庆. 1994. 地震能量空间分布分形特征及其中短期震兆信息研究. 地震科学联合基金进展报告, 36.

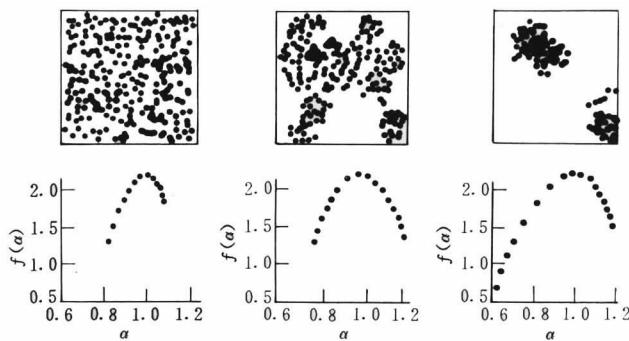


图 6 地震空间分布数值模拟及其  $f(\alpha)$ - $\alpha$  曲线图(据蒋海昆等<sup>①</sup>)

明：随着稀疏区样本的逐渐离散，密集区的逐渐从集， $D_{q-q}$  曲线变化加大， $D_{-\infty}$  相应升高，而  $D_{+\infty}$  相应下降， $f(\alpha)$  的跨度明显加大。

下面我们设计 3 种空间分布图象，做进一步论证。图 7 为 100 个点的随机(均匀)分布图，其  $D_{q-q}$  曲线比较平缓，反映出远离中强地震在震前的地震分布的正常情况。

图 8 为 60 个点随机分布、40 个点成簇分布，对其  $D_{q-q}$  曲线上明显拉开(即  $\Delta D$  增大)，负  $q$  区上升，正  $q$  区下降，可反映出震前空间分布不均匀性的增加。

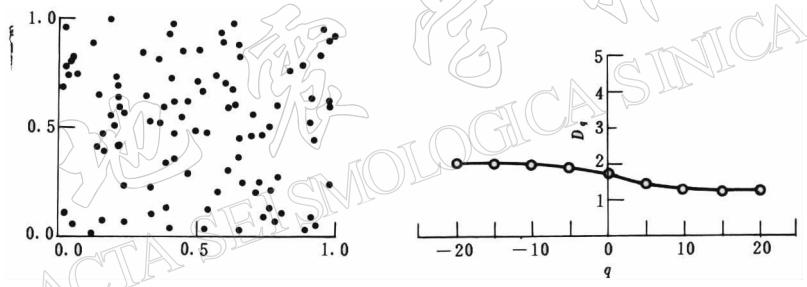


图 7 100 个点随机分布的空间点图及其分形谱

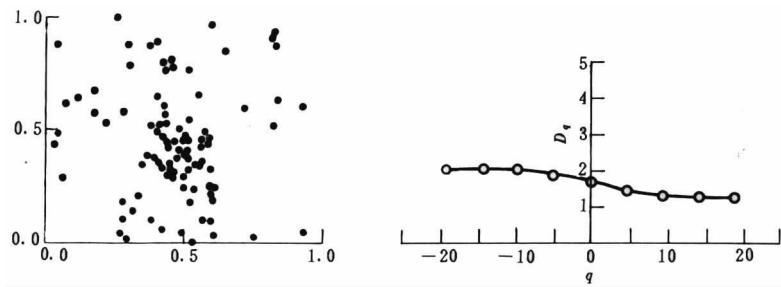


图 8 40 个点成簇分布、60 个点随机分布的空间点图及其分形谱

图 9 为更为集中分布时， $D_{q-q}$  曲线拉开很大(即  $\Delta D$  很大)，可以反映出强震后由于余震的集中分布，导致空间分布的不均匀性很大的特征。

<sup>①</sup> 蒋海昆等. 1994. 地震能量空间分布分形特征及其中短期震兆信息研究. 地震科学联合基金进展报告, 36.

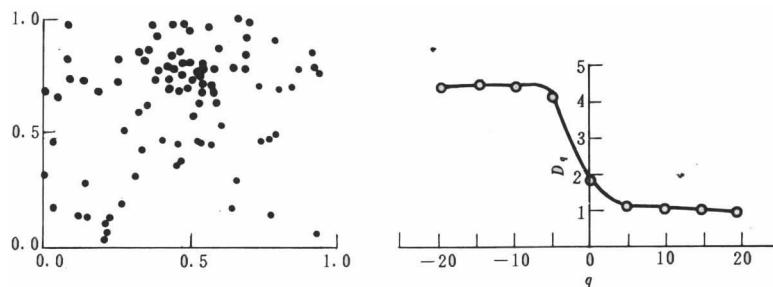


图 9 100 个点更密集分布的点图及其分形谱

由以上几个空间点图及其对应的分形谱，我们可以进一步得到，随着空间点集分布的不均匀性的增加， $D_{q-q}$  曲线变化加大，负  $q$  区的  $D_q$  相应升高，而正  $q$  区的  $D_q$  相应下降。

由前面几个震例的多重分形谱，我们可以看到，多数震例的分形谱变化大多表现在  $-q$  区，这与洪时中和黄登仕(1991)指出的  $-q$  区对应的  $D_q$  值比  $+q$  区对应的  $D_q$  值敏感得多这一观点相一致。一般地说， $-q$  区表现稀疏区的特性， $+q$  区表现密集区的特性。强震发生后，本来地震就密集的区域，再多分布一些地震对密集没有太大的影响，而稀疏区的点的邻域  $P_i$  却相对更加小了。因此，多重分形谱线在  $-q$  区的变化极为明显。

## 4 结论

大震前地震时空分布多重分形谱  $D_{q-q}$ ，从平缓到陡峭， $f(\alpha)-\alpha$  谱的  $\alpha$  取值变宽，反映了分形结构复杂性的增加，反映了地震时空分布不均匀性的增加，而从简单到复杂、从均一到不均一，正是有普遍意义的地震复杂性前兆(陈□，1989；朱令人等，1997)。由点集的数值模拟表明：强震前后多重分形谱变化的物理本质是地震分布由均一到不均一，由简单到复杂的变化过程。

## 参 考 文 献

- 陈颤. 1989. 探索地震前兆复杂性[M]. 北京：学术期刊出版社, 228  
 洪时中, 黄登仕. 1991. 多重分形与地震[J]. 四川地震, (2): 8~18  
 李东升, 郑兆蕊, 张军, 等. 1993. 地震空间分布多分维谱的计算与分析[J]. 地震学报, 15(增刊): 565~571  
 王琳瑛, 朱传镇, 黄容良. 1994. 地震时空分布结构的多重分形特征的研究[J]. 地震, 16(5): 11~18  
 朱令人, 周仕勇, 杨马陵, 等. 1995. 强震前多重分形谱的异常及其物理解释：以乌什研究区为例[J]. 内陆地震, 7(2): 97~103  
 朱令人, 周仕勇, 杨马陵, 等. 1997. 地震复杂性前兆与强震多重分形谱异常[J]. 地震, 90(4): 331~339  
 Weygaert Rien V D, Bernard J T Jones, Vincent J Martinez. 1992. The minimal spanning tree as an estimator for generalized dimensions[J]. Phys Lett, A169: 145~150

# THE MINIMAL SPANNING TREE METHOD FOR CALCULATING SEISMIC MULTI-FRACTAL

Zhu Lingren Long Haiying

(Seismological Bureau of Xinjiang Uygur Autonomous Region, Ürümqi 830011, China)

**Abstract:** There are many methods to calculate seismic fractal at present. However, there are still more or less questions to every method. In this paper, we introduce a new way to calculate seismic fractal —— the minimal spanning tree. We make an important improvement for this method. By studying some seismic events of four regions including Wushi, Wusu, Tangshan and Haicheng, we obtain that, before the strong earthquake occurrence, the multi-fractal spectrum of the space-time distribution of earthquakes changes from centralized to loose. The result shows that the complexity of fractal structure and the inhomogeneity of the space-time distribution of earthquakes are both increasing. By studying the numerical simulation of point sets, we draw the conclusion that the physical essence of multi-fractal spectrums before and after a strong earthquake occurrence is a changing process from homogeneous to inhomogeneous, from simple to complex.

**Key words:** seismic fractal; the minimal spanning tree; multi-fractal spectrum