



## 模拟地震波传播的谱元-有限差分混合方法

徐长智 刘少林 杨顶辉 李孟洋 宋汉杰 申文豪 杨树新

### Spectral element-finite difference hybrid method for seismic wave simulation

Xu Changzhi, Liu Shaolin, Yang Dinghui, Li Mengyang, Song Hanjie, Shen Wenhao, Yang Shuxin

引用本文:

徐长智, 刘少林, 杨顶辉, 李孟洋, 宋汉杰, 申文豪, 杨树新. 2025. 模拟地震波传播的谱元-有限差分混合方法. 地震学报[J], 47(3): 338–355. DOI: 10.11939/jass.20240009

Xu C Z, Liu S L, Yang D H, Li M Y, Song H J, Shen W H, Yang S X. 2025. Spectral element–finite difference hybrid method for seismic wave simulation. *Acta Seismologica Sinica*[J], 47(3): 338–355. DOI: 10.11939/jass.20240009

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.11939/jass.20240009>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 2022年9月5日泸定 $M_S$ 6.8地震宽频带地震动谱元法模拟

Broadband ground motion simulations applied to the Luding  $M_S$ 6.8 earthquake on September 5, 2022 based on spectral element method

地震学报. 2023, 45(2): 179–195 <https://doi.org/10.11939/jass.20220190>

#### 基于CPU-GPU异构并行的复杂场地近断层地震动谱元法模拟

Simulation of near-fault ground motions in complex sites based on CPU–GPU heterogeneous parallelism by spectral element method

地震学报. 2022, 44(1): 182–193 <https://doi.org/10.11939/jass.20210076>

#### 水平成层场地地震反应的集中质量切比雪夫谱元分析方法

The Lumped mass Chebyshev spectral element method for seismic response analysis of horizontally layered soil sites

地震学报. 2022, 44(1): 76–86 <https://doi.org/10.11939/jass.20210091>

#### 多人工波速优化透射边界在谱元法地震波动模拟中的应用

Application of an optimized transmitting boundary with multiple artificial wave velocities in spectral–element simulation of seismic wave propagation

地震学报. 2022, 44(1): 26–39 <https://doi.org/10.11939/jass.20210090>

#### 时域谱元法的质量特性模型及其构建方法

The mass property model and its implementation in the time–domain spectral element method

地震学报. 2022, 44(1): 60–75 <https://doi.org/10.11939/jass.20210117>

#### 基于动力有限差分法的典型海域自由场二维地震反应分析

Two dimensional seismic responses of free field in typical seafloor site based on dynamic finite difference method

地震学报. 2020, 42(6): 769–780 <https://doi.org/10.11939/jass.20190191>

徐长智, 刘少林, 杨顶辉, 李孟洋, 宋汉杰, 申文豪, 杨树新. 2025. 模拟地震波传播的谱元-有限差分混合方法. 地震学报, 47(3): 338–355. doi: [10.11939/jass.20240009](https://doi.org/10.11939/jass.20240009).  
Xu C Z, Liu S L, Yang D H, Li M Y, Song H J, Shen W H, Yang S X. 2025. Spectral element-finite difference hybrid method for seismic wave simulation. *Acta Seismologica Sinica*, 47(3): 338–355. doi: [10.11939/jass.20240009](https://doi.org/10.11939/jass.20240009).

# 模拟地震波传播的谱元-有限差分混合方法<sup>\*</sup>

徐长智<sup>1)</sup> 刘少林<sup>1,2),†</sup> 杨顶辉<sup>3)</sup> 李孟洋<sup>1)</sup>  
宋汉杰<sup>1)</sup> 申文豪<sup>1)</sup> 杨树新<sup>1)</sup>

1) 中国北京 100085 应急管理部国家自然灾害防治研究院

2) 中国上海 201602 上海佘山地球物理国家野外科学观测研究站

3) 中国北京 100084 清华大学数学科学系

**摘要** 为了充分发挥谱元法和有限差分法各自在数值模拟复杂介质中地震波传播的优点, 同时避免各自缺点, 本文提出了模拟地震波传播的谱元-有限差分(SEM-FDM)混合方法。该混合方法在起伏地形附近采用谱元法计算地表附近的地震波传播; 在远离起伏地形的区域之下, 采用有限差分法计算地震波传播; 之后通过构建数据交换区实现两种方法的耦合。结果表明, 本文提出的谱元-有限差分混合方法能有效地模拟任意非均匀介质中的地震波传播, 具有刻画复杂地形的能力, 能处理自由地表边界条件, 且能适应模型内的速度间断面。通过模型试算, 并与谱元法进行对比, 验证了该混合方法用于地震波模拟的有效性和高精度性。

**关键词** 谱元法 有限差分法 混合方法 起伏地表 数值模拟

**doi:** [10.11939/jass.20240009](https://doi.org/10.11939/jass.20240009) **中图分类号:** P315.3<sup>+</sup>1 **文献标识码:** A

## Spectral element-finite difference hybrid method for seismic wave simulation

Xu Changzhi<sup>1)</sup> Liu Shaolin<sup>1,2),†</sup> Yang Dinghui<sup>3)</sup> Li Mengyang<sup>1)</sup>  
Song Hanjie<sup>1)</sup> Shen Wenhao<sup>1)</sup> Yang Shuxin<sup>1)</sup>

1) National Institute of Natural Hazards, Ministry of Emergency Management of China, Beijing 100085, China

2) Shanghai Sheshan National Geophysical Field Observation and Research Station, Shanghai 201602, China

3) Department of Mathematical Sciences, Tsinghua University, Beijing 100084, China

**Abstract:** Efficient methods for seismic wave simulations play important roles in seismic waveform inversion. Currently, the spectral element method (SEM) and finite difference method (FDM) are mostly frequently used for simulating seismic waveforms in waveform inversion due

\* 基金项目 北京市自然科学基金(8222033)、上海佘山地球物理国家野外科学观测研究站开放基金(SSOP202203)和国家自然科学基金(42174111, U23A2029)联合资助。

收稿日期 2024-01-19 收到初稿, 2024-04-17 决定采用修改稿。

作者简介 徐长智, 在读硕士研究生, 从事地震层析成像研究, e-mail: [xuchangzhi233@163.com](mailto:xuchangzhi233@163.com); <sup>†</sup>通信作者: 刘少林, 博士, 研究员, 从事地震波正反演研究, e-mail: [shaolinliu88@163.com](mailto:shaolinliu88@163.com)



to their efficiency. Compared with other methods, such as finite element method and pseudo spectral method, the computational costs of the SEM and FDM are relatively low, which is greatly important for seismic wave modeling in large-scale models and waveform inversion. Each method, the SEM or FDM, has its advantages and disadvantages when simulating seismic waveforms in complex medium. For example, the SEM can simulate seismic waves in arbitrary heterogeneous medium with velocity discontinuities due to its high-accuracy. In addition, the free-surface boundary can be automatically satisfied. However, designing a mesh with high quality is generally time-consuming. In some cases, it is difficult to construct an appropriate mesh for the SEM. The FDM generally uses regular meshes for seismic wave modeling. Therefore, it is extremely convenient to design a mesh for the FDM. However, free-surface boundary condition cannot be automatically satisfied and special treatments are required to incorporate the free-surface boundary condition. Although some special treatments are proposed in the past decades, algorithms for the approximation of free-surface boundary condition commonly exhibit extremely low accuracy. Thus, it is difficult to accurately simulate surface waves using the FDM. To retain the advantages and avoid the disadvantages of the SEM and FDM, we develop a hybrid method, which is called as SEM-FDM. For this method, the propagation of seismic waves near the free-surface boundary is simulated by the SEM, and in the remaining area is modeled by the FDM. A layer for data exchanging is used for coupling the two methods. The SEM-FDM hybrid method is efficient for the simulation of seismic waves in arbitrary heterogeneous media. The hybrid method has the properties for handling undulating topography, free-surface boundary condition and velocity discontinuities. Based on a plane wave analysis, we derive the stability conditions of the hybrid method, and present the stability conditions for spatial accuracy with different orders. In order to demonstrate the validity of the SEM-FDM hybrid method in seismic wave modeling, we construct four models for numerical tests. The first model is used to show the accuracy and efficiency of the SEM-FDM hybrid method. By a comparison with analytical solutions and results from the FDM and SEM, the SEM-FDM is indeed very suitable for seismic wave modeling. The second and third models are used to display the ability of the SEM-FDM hybrid method for modeling seismic wave in complex medium. Although relatively simple grids are adopted, the SEM-FDM can still accurately model seismic waves. The last is a really geological model, which is used to exhibit the usefulness of the proposed method in real cases. By a comparison with the results from the SEM, we demonstrate that the SEM-FDM hybrid method is a useful tool in real cases. Although the areas near the free-surface area are discretized by irregular elements, the process for generating irregular elements are not difficult. In our future work, we will use Fourier series to approximate the free surface and automatically generate a mesh based on the Fourier series and control parameters.

**Key words:** spectral element method; finite difference method; hybrid method; undulating surface; numerical simulation

## 引言

地震波正演模拟有助于研究地震波传播规律, 是研究地球内部结构的基础, 同时在资源勘探和地震灾害评估中也发挥着重要作用([Tromp et al, 2005](#); [Tong et al, 2014](#); [Liu et al, 2015a](#); [Shen et al, 2022](#); [祝贺君等, 2023](#)). 就地震波运动方程的直接求解而言, 研究人员已发展出多种数值模拟方法, 例如: 有限差分法([Zhang, Yao, 2013](#))、有限元法(finite difference

method, 缩写为 FDM)(Marfurt *et al.*, 1984)、谱元法(spectral-element method, 缩写为 SEM)(Komatitsch, Vilotte, 1998; 刘少林等, 2021)等, 每种方法各有其优缺点, 其中有限差分法和谱元法是目前关于地震波运动方程的数值求解使用最广泛的方法(桑莹泉等, 2021).

有限差分法(FDM)采用泰勒(Taylor)级数近似原理, 利用网格点上的波场值直接对方程中的空间微分项离散(Zhou *et al.*, 2021), 该方法具有数值格式简单、程序易于实现、计算速度快等优点(Zhang, Yao, 2013), 因此, FDM 在不同尺度的地震波场模拟问题中得到了广泛应用(Moczo *et al.*, 2007; Zhang *et al.*, 2019). 然而, FDM 在模拟地震波时存在一些不足, 如网格划分不灵活、自由边界条件处理困难以及数值频散现象明显等(Liu, 2014; Zhang, Yao, 2013). 前人已提出多种策略克服 FDM 存在的不足, 例如: 曲线网格方法(Rao, Wang, 2013)、优化系数方法(Zhang, Yao, 2013)、自由地表边界条件处理方法(Lan, Zhang, 2011). 虽然这些改进策略对 FDM 某方面的不足具有一定的改进效果, 但其它方面的不足依然存在. 例如: 曲线网格的 FDM 难以以高阶差分格式应用于地震波数值模拟, FDM 对自由地表边界条件的近似精度低(苏波等, 2019).

谱元法(SEM)基于变分原理求解弱形式的地震波运动方程, 该方法结合了谱方法的高精度性和有限元法的网格灵活性(Komatitsch, Vilotte, 1998), 且能自然满足自由地表边界条件(刘少林等, 2022). 当采用勒让德(Legendre)型正交插值多项式和高斯-勒让德-洛巴托(Gauss-Legendre-Lobatto, 缩写为 GLL)数值求积公式时, 由于数值积分点与插值点重合的特点(Komatitsch, Tromp, 2002; 刘少林等, 2021), SEM 得到的质量矩阵为对角矩阵, 而对角矩阵的求逆运算计算量较小, 因此 SEM 用于地震波场模拟时具有较高的计算效率(刘少林等, 2021). 在波形伴随层析成像之中, 越来越多的研究利用 SEM 计算地震波形(Chen *et al.*, 2015; Lei *et al.*, 2020).

虽然谱元法得到了较为广泛的应用, 但该方法存在两方面不足. 其一, 相比于规则网格的 FDM, SEM 的计算量明显要大(刘少林等, 2021). 在物理坐标向局部坐标转换的过程中, 任意方向的空间微分算子要转换为局部坐标所有方向微分算子的加权(Komatitsch, Tromp, 2002), 该过程增加了计算量. 其二, 当模型内界面复杂时, 网格剖分存在一定困难. 谱元法采用六面体单元(三维情形)刻画地下介质结构, 当模型内部界面复杂时, 难以简单快捷地构建高质量网格(Shen *et al.*, 2022).

为了实现复杂含起伏地表模型中的地震波高效数值模拟, 前人发展了有限元-有限差分混合方法(Galis *et al.*, 2008). 在该混合方法中, 利用有限元法模拟起伏地表附近的地震波场, 采用 FDM 模拟其它区域中的地震波场. 由于有限元法计算量较大, 为了提高计算效率, 有限元法所计算的区域仅占模型的一小部分(Galis *et al.*, 2008). 特别需要指出的是, 在该混合方法中 FEM 难以使用高阶格式得到高精度地震波场.

为了实现复杂模型中地震波场的高精度、高效数值模拟, 本文发展了 SEM-FDM 混合方法. 该方法在地表附近采用 SEM 模拟地震波传播, 在远离地表区域利用 FDM 计算地震波场. 该混合方法吸收了 SEM 自由地表边界条件自然满足的优点, 具有对复杂地形的刻画能力; 同时, 采用针对任意非均匀介质的有限差分格式, 模拟地震波在远离地表区域中的传播, 在保证算法计算效率的同时避免了生成复杂网格的难点问题. 通过模型试算, 并与 SEM 和 FDM 等方法进行对比, 以证实 SEM-FDM 混合方法是一种高效的地震波模拟方法.

## 1 SEM-FDM 混合方法原理

以二维非均匀各向同性介质中的地震波运动方程为例, 介绍 SEM-FDM 混合方法的原理, 对于三维或各向异性介质的 SEM-FDM 混合方法与之类似. 首先简要介绍 SEM, 更详细的推导请参阅刘少林等(2021). 地震波运动方程可写为:

$$\begin{cases} \rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f}, \\ \mathbf{T} = \mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}, \end{cases} \quad (1)$$

式中  $\mathbf{u} = (u, v)$  为位移向量,  $\mathbf{T}$  为应力张量,  $\mathbf{f} = (f_x, f_z)$ ,  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial z)$ ,  $\rho$  为介质密度,  $\mathbf{C}$  为弹性张量,  $\mathbf{u}$  上两点表示时间二阶微分. 将任意测试向量  $\mathbf{w}$  乘以式(1), 并通过分部积分和格林公式, 式(1)可变为:

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \ddot{\mathbf{u}} d^2x = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \mathbf{T} d^2x + \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f} d^2x, \quad (2)$$

式中  $\Omega$  为研究区域,  $\mathbf{n}$  为边界外法向. 根据自由地表边界条件和自然边界条件, 式(2)中关于边界的积分项为零. 将模型剖分为  $N_e$  个非重叠单元, 即有  $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_e} \Omega_i$ . 在每个单元上将物理坐标  $(x, z)$  变换成局部坐标  $(\xi, \eta)$ ,  $\xi$  和  $\eta$  的取值范围均为  $[-1, 1]$ . 对于每个局部坐标, 根据方程  $(1 - \alpha^2)L'_N(\alpha) = 0$  [其中  $L_N(\alpha)$  为  $N$  阶勒让德多项式] 的零点确定插值点. 确定插值点以后, 每个单元上利用插值多项式来近似  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{w}$ , 其近似公式为:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^e(\xi, \eta) \approx \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N l_i(\xi) l_j(\eta) \mathbf{u}_{ij}^e, \\ \mathbf{w}^e(\xi, \eta) \approx \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N l_i(\xi) l_j(\eta) \mathbf{w}_{ij}^e, \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $l$  为插值多项式, 上标  $e$  表示单元编号, 下标  $i$  和  $j$  表示插值节点索引. 将式(3)代入式(2), 在每个单元上采用 GLL 数值求积公式, 得到式(2)对应的离散形式:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{M}^e \dot{\mathbf{U}}^e = - \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{K}^e \mathbf{U}^e + \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{F}^e, \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{U}^e$  为离散位移向量,  $\mathbf{M}^e$  为单位质量矩阵,  $\mathbf{K}^e$  为单元刚度矩阵,  $\mathbf{F}^e$  为单元震源向量.

为了便于介绍 FDM, 将式(1)写成如下等价形式:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + f_x, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + f_z, \end{cases} \quad (5)$$

式中  $\lambda$  和  $\mu$  为各项同性介质的拉梅常数. 在式(5)的右端项中, 对于只包含关于  $x$  或  $z$  的偏导数项的 FDM 离散格式, 其离散格式具有相似性. 以  $\partial[(\lambda + 2\mu)\partial u/\partial x]/\partial x$  为例, 其  $2N$  阶有限差分近似格式为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i_0, j_0} &\approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=0}^{N-1} b_i \left[ (\lambda + 2\mu)_{i_0+i+\frac{1}{2}, j_0} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i_0+i+\frac{1}{2}, j_0} - (\lambda + 2\mu)_{i_0-i-\frac{1}{2}, j_0} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i_0-i-\frac{1}{2}, j_0} \right] = \\ &\frac{1}{\Delta x^2} \sum_{i=0}^{N-1} b_i \left[ (\lambda + 2\mu)_{i_0+i+\frac{1}{2}, j_0} \sum_{j=0}^{N-1} b_j (u_{i_0+i+j+1, j_0} - u_{i_0+i-j, j_0}) - \right. \end{aligned}$$

$$(\lambda + 2\mu)_{i_0-i-\frac{1}{2}, j_0} \sum_{j=0}^{N-1} b_j (u_{i_0-i+j, j_0} - u_{i_0-i+j-1, j_0}) \Big], \quad (6)$$

式中: 下标  $i_0$  和  $j_0$  分别为  $x$  和  $z$  方向上的有限差分网格点编号,  $b_j$  为有限差分系数 (Liu, 2014),  $\Delta x$  为  $x$  方向的网格间距. 应该说明的是, 式(6)涉及半网格点上的拉梅系数值, 可利用整数网格点上的值和调和平均公式 (Ma et al, 2018) 计算. 以  $\partial(\lambda \partial v / \partial x) / \partial z$  为例介绍式(5)中的混合导数有限差分离散格式,  $\partial(\lambda \partial v / \partial x) / \partial z$  的近似公式如下 (Ma et al, 2018):

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]_{i_0, j_0} &= \sum_{j=1}^N \omega_j \frac{\lambda_{i_0, j_0+j} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{i_0, j_0+j} - \lambda_{i_0, j_0-j} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{i_0, j_0-j}}{\Delta z} = \\ &\sum_{j=1}^N \frac{\omega_j}{\Delta z} \left( \lambda_{i_0, j_0+j} \sum_{i_0=1}^N \omega_{i_0} \frac{v_{i_0+i, j_0+j} - v_{i_0-i, j_0+j}}{\Delta x} - \lambda_{i_0, j_0-j} \sum_{i_0=1}^N \omega_{i_0} \frac{v_{i_0+i, j_0-j} - v_{i_0-i, j_0-j}}{\Delta x} \right) = \\ &\frac{1}{\Delta x \Delta z} \sum_{j_0=1}^N \frac{\omega_{j_0}}{2j_0} \left[ \lambda_{i_0, j_0+j} \sum_{i_0=1}^N \frac{\omega_{i_0}}{2i_0} (v_{i_0+i, j_0+j} - v_{i_0-i, j_0+j}) - \lambda_{i_0, j_0-j} \sum_{i_0=1}^N \frac{\omega_{i_0}}{2i_0} (v_{i_0+i, j_0-j} - v_{i_0-i, j_0-j}) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

式中  $\Delta z$  为  $z$  方向的网格间距,  $\omega_j$  为有限差分系数. 应该指出的是, 虽然  $b_i$  和  $\omega_j$  都为有限差分系数, 但其值不同.

使用 SEM 模拟起伏地表附近的地震波传播, 利用 FDM 模拟远离地表处的地震波场, 即为 SEM-FDM 混合方法, 该方法的优势在于网格建模只需关注起伏地表地形, 而无需考虑远离地表处的非规则结构, 这种处理方式在保持 SEM 对起伏地表模型处理能力的同时, 极大地简化了 SEM 网格建模 (图 1). SEM-FDM 混合方法的核心在于在 SEM 网格的底边界和 FDM 的上边界设置数据交换区, 设置数据交换区是为了在 SEM 网格的底边界和 FDM 网格的上边界满足位移连续性边界条件. 将计算区域  $\Omega$  分解为  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$ , 即  $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ ,  $\Omega_1$  为模型浅部区域, 包含起伏地表,  $\Omega_2$  为模型深部区域, 地震波运动方程的求解可表示为 (假设震源

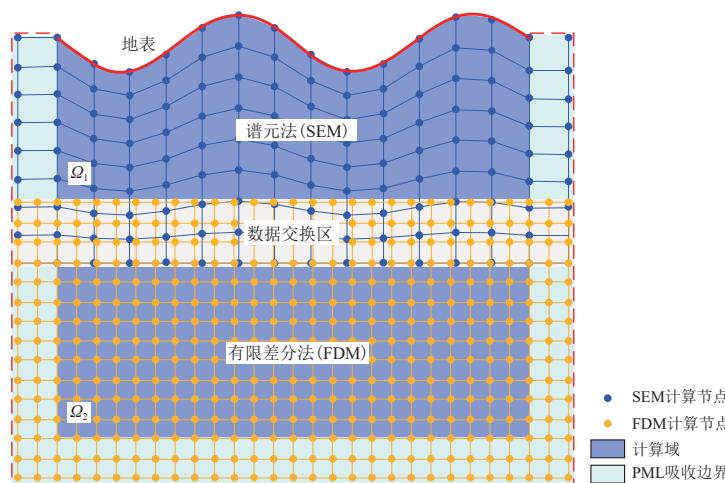


图 1 谱元-有限差分混合方法的网格模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the grid model in the SEM-FDM hybrid method

位于  $\Omega_1$ ):

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \ddot{\mathbf{U}}_1 = K^{\text{SEM}}(\mathbf{U}_1 + \mathbf{f}) & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ \ddot{\mathbf{U}}_2 = K^{\text{FDM}}(\mathbf{U}_2) & \mathbf{x} \in \Omega_2, \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $\mathbf{U}$  为离散网格点上的位移向量, 其下标 1 和 2 分别代表研究区域  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$ ,  $K^{\text{SEM}}$  表示 SEM 的空间离散算子 (Liu *et al.*, 2017),  $K^{\text{FDM}}$  表示 FDM 的空间离散算子 (Liu *et al.*, 2015a). 当有限差分的阶数为  $2N$  时, 数据交换区的厚度为  $N \cdot \Delta z$ , 即  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  重叠区域的厚度为  $N \cdot \Delta z$ . 此时通过以下三步操作保证 SEM 网格的底边界和 FDM 网格的上边界满足位移连续边界条件. 第一, 在  $t$  时刻, 由式(7)计算  $\Omega_1$  区域 GLL 节点上的加速度值, 以及  $\Omega_2$  区域有限差分节点上的加速度值, 并根据时间中心差分公式 (刘少林等, 2022) 得到  $t + \Delta t$  (其中  $\Delta t$  为时间离散步长) 时刻 GLL 节点和有限差分节点上的波场值. 第二, 在  $t + \Delta t$  时刻, 数据交换区域第一层至第  $N$  层有限差分网格点上的波场可通过邻近 GLL 点上的波场值插值近似 (图 2a), 插值近似多项式为:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{\text{FD}}(x, z) \approx \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M L_{ij} \mathbf{U}_{\text{GLL}}(x_i, z_j), \\ L_{ij}(x, z) = \prod_{k=0, k \neq i}^M \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \prod_{k=0, k \neq j}^M \frac{z - z_k}{z_j - z_k}, \end{cases} \quad (9)$$

式中: 下标 FD 表示有限差分网格节点, 下标 GLL 表示 SEM 的 GLL 网格节点,  $L$  为拉格朗日插值多项式,  $M$  为插值多项式阶数. 实际计算表明: 插值阶数为 3 时, 可保证数据交换的精度较高; 进一步提高插值阶数, 对于数据交换精度提升的贡献较小. 第三, 在  $t + \Delta t$  时刻, 数

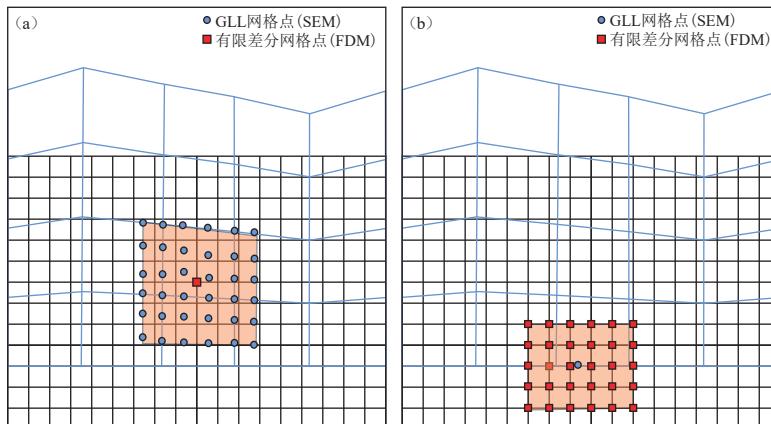


图 2 数据交换区有限差分网格点和 GLL 网格点上的波场数据插值示意图  
(a) 数据交换区的位移插值; (b) 数据交换区底边界 GLL 点上的位移插值

Fig. 2 Schematic of data interpolations for the wavefields on the finite difference and GLL grid nodes in the data exchange domain

(a) Displacement interpolations within the data exchange domain; (b) Displacement interpolations at the GLL points located on the bottom boundary of the data exchange domain

据交换区底边界 GLL 积分点的位移值可通过邻近的有限差分节点上的波场值插值近似(图 2b), 近似公式如下:

$$U_{\text{GLL}}(x, z) \approx \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M L_{ij} U_{\text{FD}}(x_i, z_j). \quad (10)$$

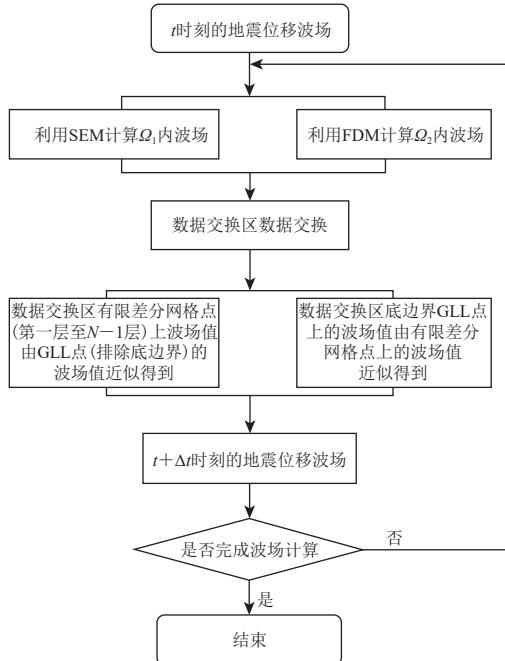


图 3 SEM-FDM 混合方法模拟地震波传播示意图

Fig. 3 Schematic of wavefield simulation using the SEM-FDM hybrid method

近. SEM 和 FDM 的高阶格式能有效地减弱数值频散(De Basabe, Sen, 2007; Liu *et al*, 2015a), 但数值格式的阶数过高会导致计算效率下降, SEM 的常用阶数为 4—5 (Komatsch, Tromp, 2002), FDM 的常用差分阶数为 4—6 (Tan, Huang, 2014). 为了在数值精度与计算效率之间达到平衡, 建议一个波长内的采样点数为 8—10, SEM-FDM 混合方法中 SEM 的阶数选为 5, FDM 的阶数选为 8—10.

## 2 稳定性分析

根据 Ma 等(2014)和 Liu 等(2015b, 2017)的研究, 地震波运动方程的稳定性条件可表示为:

$$\frac{\Delta t v_p}{h} \sqrt{1 + \frac{a}{\gamma^2}} \leq b, \quad (11)$$

式中:  $v_p$  为 P 波速度,  $\gamma = v_p/v_s$  为 P 波与 S 波的速度比,  $h$  为网格间距(或 GLL 点的平均间距),  $a$  和  $b$  为待定常数. De Basabe 等(2007)和 Liu 等(2017)指出: 当 SEM 的空间插值阶数为 1 时, SEM 与标准网格 2 阶的 FDM 等价(Liu *et al*, 2017), 此时  $a$  和  $b$  的值都为 1; 当 SEM 的空间插值阶数大于 1 时,  $a$  为 0,  $b$  值列于表 1. 在对式(5)中只包含  $x$  或  $z$  方向的导数项近似时, 由于

SEM-FDM 混合方法模拟地震波场的流程可由图 3 描述. 相较于 SEM 和 FDM, SEM-FDM 混合方法通过设置数据交换区的方式满足研究区内部位移连续性边界条件. 应该指出的是, 在  $t + \Delta t$  时刻, 在近似数据交换区第一层至第  $N$  层有限差分网格点上的位移时, 避免使用数据交换区底边界上 GLL 点上的位移值进行插值近似. 此外, 在数据交换区, 除了底边界 GLL 点上位移值需要插值近似得到  $t + \Delta t$  时刻的值, 其它 GLL 点上的位移值已经满足连续性边界条件而无需再插值近似.

数值算法精度主要由网格尺度和算法数值阶数来决定. 研究表明网格尺寸(或一个波长内的采样点数)是影响数值算法精度的最主要因素(Liu *et al*, 2015b, 2017). 在使用 SEM-FDM 混合方法模拟地震波场时, 为了避免因 SEM 和 FDM 精度不匹配而在数据交换区产生虚假散射, 网格设计时 SEM 的 GLL 点平均间距应与 FDM 的网格间距相

利用了半网格点处的空间一阶导数, 以至于本文 SEM-FDM 混合方法中的 FDM 差分格式与标准网格 FDM 有一定差别, 且稳定性条件与标准网格的 FDM 之间具有一定差别。根据平面波分析原理(Liu *et al.*, 2015b)可得到 SEM-FDM 混合方法中 FDM 的稳定性条件,  $a$  和  $b$  的取值见表 2。

表 1 不同空间插值阶数时 SEM 的稳定性  
参数  $a$  和  $b$  值

Table 1 The stability parameters  $a$  and  $b$  for the SEMs with different interpolation orders

空间插值阶数	$a$	$b$
1	1	1
2	0	0.66
3	0	0.56
4	0	0.48
5	0	0.41
6	0	0.35
7	0	0.31
8	0	0.28
9	0	0.25

表 2 不同空间差分阶数时 FDM 的稳定性  
参数  $a$  和  $b$  值

Table 2 The stability parameters  $a$  and  $b$  for the FDMS with different difference orders

空间插值阶数	$a$	$b$
2	1.08	1.00
4	1.07	0.80
6	0.93	0.73
8	0.73	0.69
10	0.70	0.67
12	0.55	0.65
14	0.36	0.63
16	0.31	0.62
18	0.21	0.61

获得 SEM 和 FDM 各自的稳定性条件之后, 可根据 SEM 和 FDM 稳定性的下限得到 SEM-FDM 混合方法的稳定性条件, 例如 SEM-FDM 混合方法中, SEM 采用 5 阶插值, FDM 采用 8 阶空间差分, 其稳定性条件为:

$$\frac{\Delta t v_p}{h} \leq 0.41. \quad (12)$$

### 3 数值算例

本节将利用四个数值算例检验 SEM-FDM 混合方法的计算精度与效率。数值算例中 SEM-FDM 混合方法的 SEM 阶数选为 5, FDM 空间差分阶数选为 8。为了减弱边界截断而引起的虚假反射, 采用二阶位移形式的完美匹配层(perfectly matched layer, 缩写为 PML)吸收边界条件(刘有山等, 2012)吸收虚假反射。采用较小的时间步长, 以减弱时间离散误差对结果的干扰(衡量时间离散大小的标准是式(11)中的库朗数), 3.1—3.3 节和 3.4 节中的时间离散间隔分别为 0.1 ms 和 1 ms。

#### 3.1 Lamb 问题

均匀介质模型如图 4 所示,  $v_p$  为 3.2 km/s,  $v_s$  为 1.8 km/s, 密度  $\rho$  为  $2.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 一个

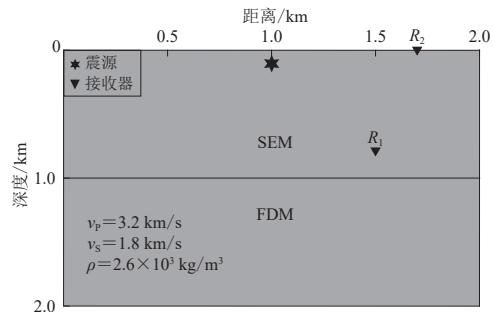


图 4 用于检验 SEM-FDM 混合方法计算  
效率的均匀介质模型  
模型 0—1 km 深度部分用 SEM 计算,  
1—2 km 深度部分用 FDM 计算

Fig. 4 A homogeneous model used to verify the efficiency of the SEM-FDM hybrid method. The wavefields in upper (0—1 km depths) and lower (1—2 km depths) parts of the model are calculated by the SEM and FDM, respectively

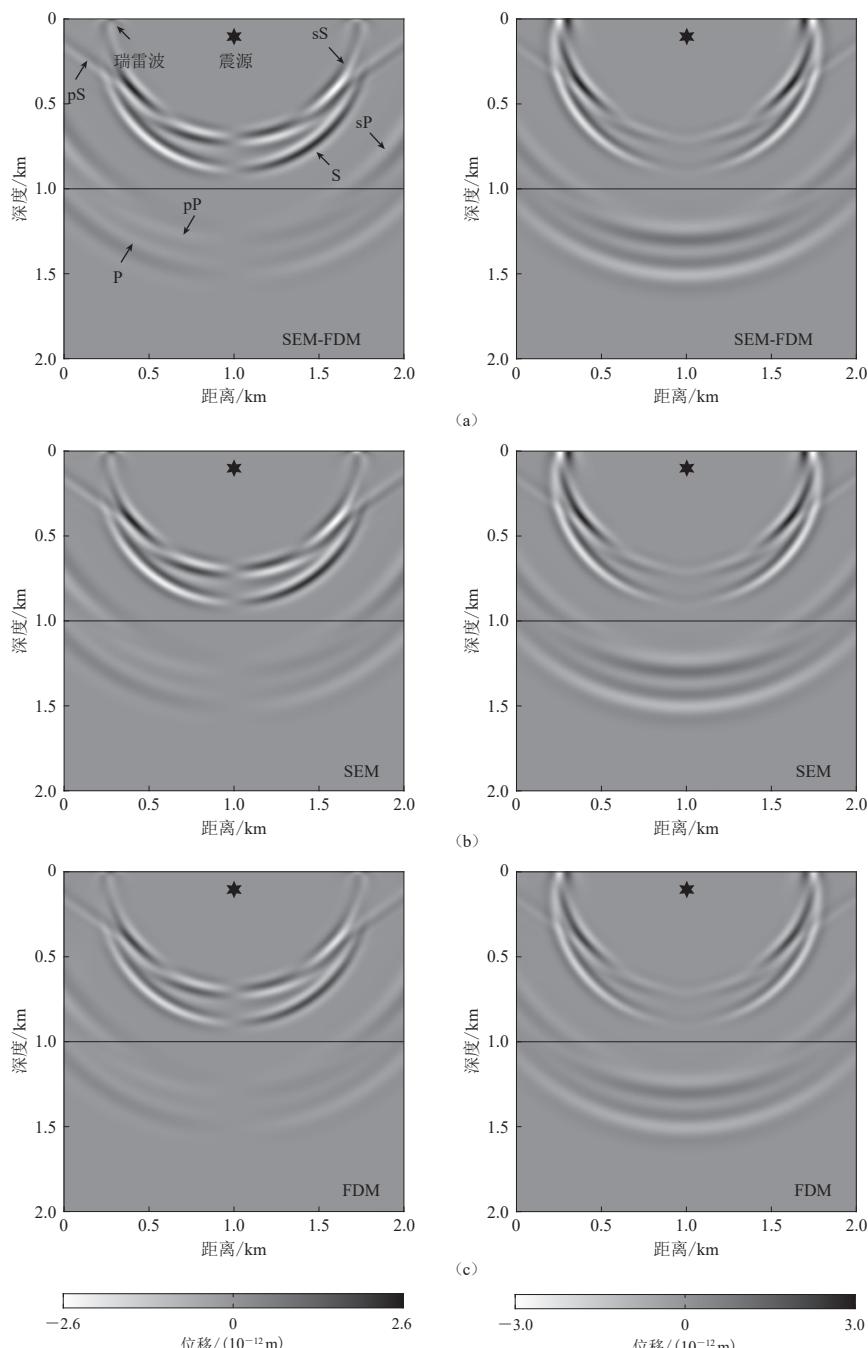


图 5 均匀介质模型中分别由 SEM-FDM 方法(a)、SEM 方法(b)和 FDM 方法(c)计算所得 0.5 s 时刻的位移波场水平分量(左)和垂直分量(右)快照

Fig. 5 Snapshots of horizontal (left) and vertical (right) components of displacement wavefield in a homogeneous model at the moment 0.5 s generated by SEM-FDM (a), SEM (b) and FDM (c), respectively

单位集中力位于(1000 m, 100 m)处, 震源时间函数是频率为15 Hz的雷克(Ricker)子波。两个接收器 $R_1$ 和 $R_2$ 分别位于(1500 m, 800 m)和(1700 m, 0 m)。模型0—1 km深度部分用SEM计算, 正方形单元的边长为20 m; 模型1—2 km深度部分用FDM计算, 网格间隔为5 m。数据交换区位于深度1000 m附近。

上述模型的波场模拟结果如图5所示。为了对比需要, 图5也展示了5阶SEM和8阶FDM各自的波场模拟结果。从 $t=0.5$  s的快照可看出SEM-FDM混合方法、SEM和FDM的波场模拟结果大致相同(图5)。波场快照显示除了明显的直达波, 还有地表的反射波和转换波; 由于震源离地表较近, 可在地表附近观测到明显的瑞雷面波。从图5a可看到地震波场具有较好的连续性, 在1 km深度附近的数据交换区未见明显的虚假数值散射现象。

为了说明SEM-FDM混合方法的波场模拟精度, 图6展示了合成波形模拟结果, 并将数值模拟结果与解析解(De Hoop, 1959)对比。可以看出: 在模型内部的接收器 $R_1$ 处SEM-FDM

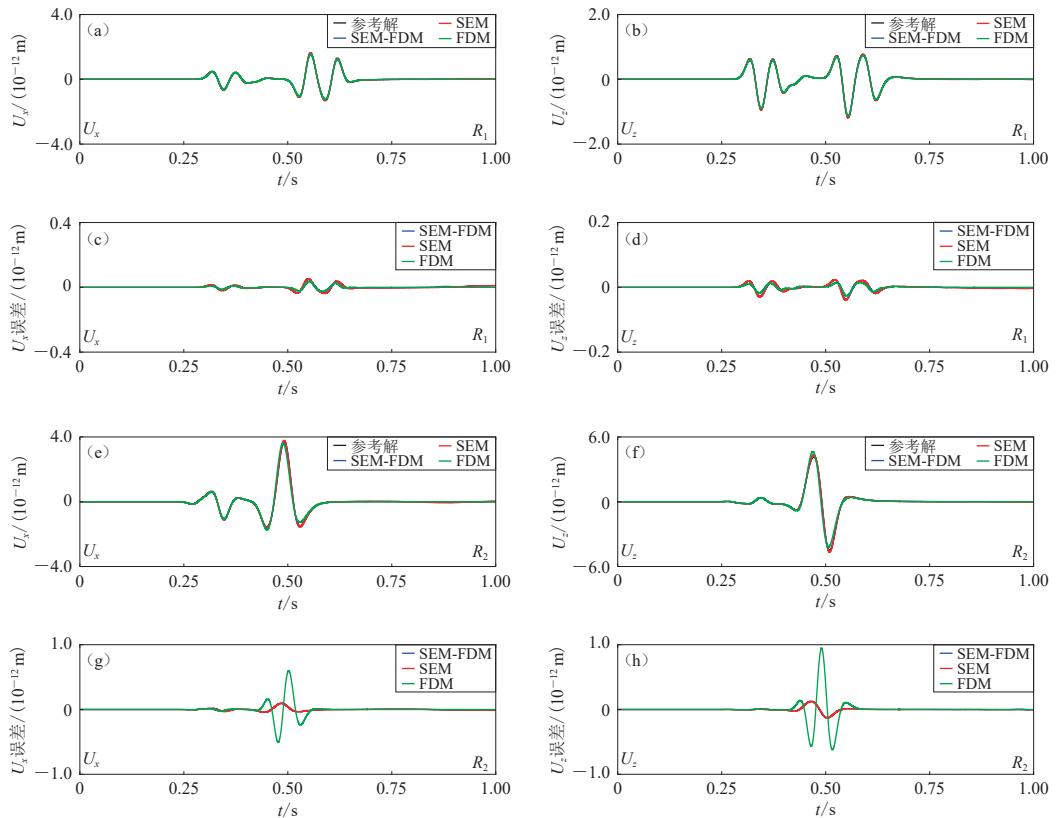


图6 由解析解得到的合成地震记录及其与三种数值方法得到的地震记录对比

(a, b)  $R_1$ 处合成位移水平分量和垂直分量; (c, d)  $R_1$ 处合成位移波形水平分量和垂直分量的误差; (e, f)  $R_2$ 处合成位移水平分量和垂直分量; (g, h)  $R_2$ 处合成位移波形水平分量和垂直分量的误差

Fig. 6 Comparison of synthetic seismograms generated by analytical solution with those by three numerical methods

(a, b) The horizontal and vertical components of displacements recorded at the  $R_1$ ; (c, d) The errors of the horizontal and vertical components of the displacements at the  $R_1$ ; (e, f) The horizontal and vertical components of displacements at the  $R_2$ , respectively; (g, h) The errors of the horizontal and vertical components of the displacements at the  $R_2$

混合方法、SEM 和 FDM 的模拟结果与解析解均较接近(图 6a 和 6b), 最大相对误差约为 3% (图 6c 和 6d); 在地表接收器  $R_2$  处 SEM-FDM 混合方法和 SEM 的模拟结果精度较高, FDM 模拟结果存在明显误差(图 6e 和 6f), 最大相对误差约为 15% (图 6g 和 6h), 其误差明显大于 SEM-FDM 混合方法和 SEM, 这是由 FDM 对自由地表边界条件近似精度降低所致(苏波等, 2019). 由于 SEM-FDM 混合方法能自动满足自由地表边界条件, 因此能高精度模拟瑞雷面波(图 6e 和 6f).

表 3 三种地震波正演模拟方法运行内存和计算时间的对比

Table 3 Comparison of computer memory and computation time for three forward modeling methods

正演模拟方法	运行内存/KB	计算时间/s
SEM-FDM	68157	912.12
SEM	80740	961.31
FDM	28835	821.25

SEM 和 FDM 的内存消耗仍处于同一数量级(表 3; 刘少林等, 2021). 由于 SEM-FDM 混合方法为 SEM 和 FDM 两种方法的综合, 因此其内存消耗介于 SEM 与 FDM 之间. 当使用 SEM 方法计算空间任意方向的微分时, 需要将空间坐标转换为三个参考坐标的加权(刘少林等, 2021), 而规则网格的 FDM 方法不存在坐标转换过程(Liu, 2014), 因此 SEM 的计算量略大于 FDM, 但二者的计算量仍处于同一数量级. 因此对于 SEM-FDM 混合方法而言, 其计算量介于 SEM 与 FDM 之间.

### 3.2 层状模型

为了说明 SEM-FDM 混合方法对模型内界面的处理能力, 设计如图 7 所示的模型, 该模型具有分层结构, 且内部含一倾斜界面. 在 SEM-FDM 混合方法中: 深度 500 m 之上采用 SEM 计算, SEM 的网格单元平均尺寸为 20 m; 深度 500 m 之下利用 FDM 计算, FDM 网格间隔为 5 m; 数据交换区位于 500 m 深度附近. 模型上层介质  $v_p$  为 2.9 km/s,  $v_s$  为 1.7 km/s, 密度为  $2.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ; 下层介质  $v_p$  为 3.2 km/s,  $v_s$  为 1.8 km/s, 密度为  $2.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . 一个爆炸源位于(1 000 m, 100 m), 其时间函数为 15 Hz 的雷克子波. 两个接收器  $R_1$  和  $R_2$  分别位于(500 m, 800 m)和(500 m, 1 400 m).

采用 SEM-FDM 混合方法所得的地震波场模拟结果如图 8 所示. 为了对比, 该图也给出了 5 阶 SEM 的波场模拟结果. 需要指出的是, SEM 网格考虑了模型内部界面, 即网格剖分时沿着倾斜界面剖分. 图 8 显示 SEM-FDM 混合方法与 SEM 方法所得的波场快照模拟结果具有很好的一致性, 从波场快照可看到穿过倾斜界面的透射 P 波和 pP 波, 以及倾斜界面的反射 Pp 波、Ps 波和 pPp 波. 接收器  $R_1$  和  $R_2$  处的合成地震记录如图 9 所示, 可以看出 SEM-FDM 混

表 3 对比了 SEM-FDM 混合方法、SEM 和 FDM 三种方法的计算内存和时间. 从表 3 可看出 SEM-FDM 混合方法的计算内存和时间介于 SEM 与 FDM 之间. SEM 除了需要存储 GLL 节点上的波场值以外, 还需要存储 GLL 节点上雅克比(Jacobi)矩阵行列式的值(刘少林等, 2021, 2022), 因此 SEM 的内存消耗要大于 FDM, 但

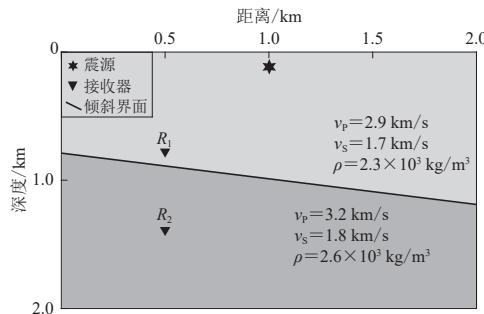


图 7 用于地震波场模拟的层状模型

Fig. 7 A layered model used for simulation of seismic wavefields

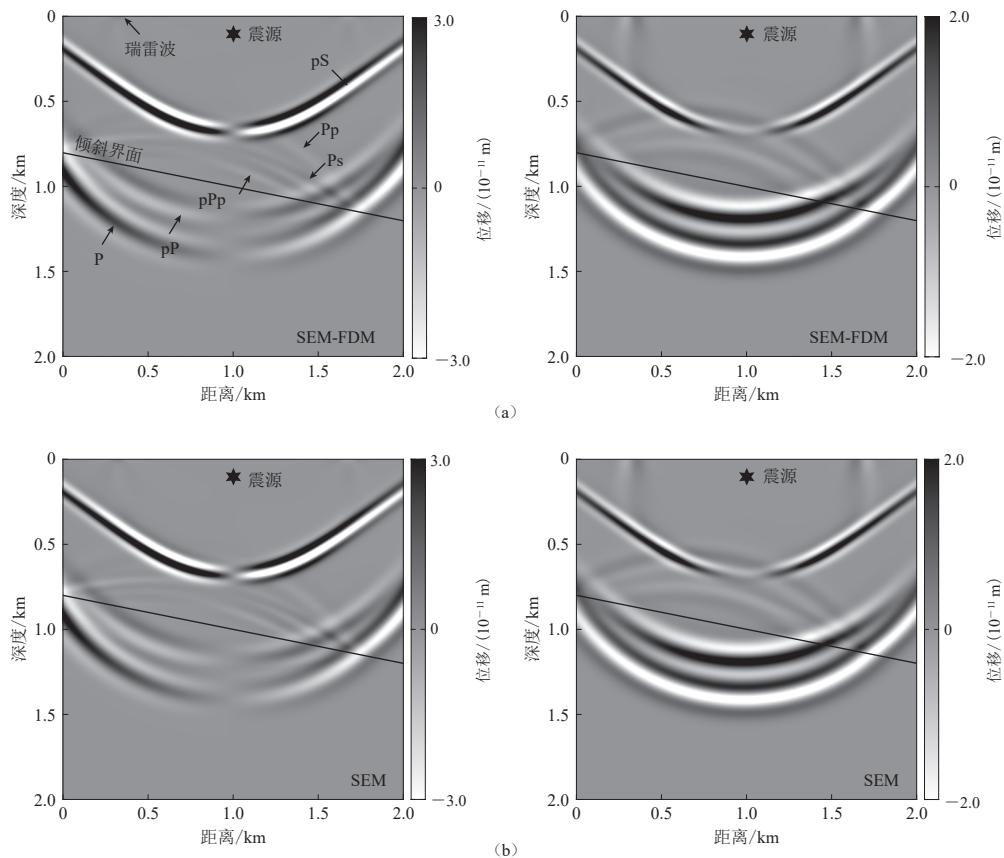


图 8 层状模型中分别由 SEM-FDM 方法(a)和 SEM 方法(b)计算所得 0.5 s 时刻的位移波场水平分量(左)和垂直分量(右)快照

Fig. 8 Snapshots of horizontal component (left) and vertical component of displacement wavefield (right) in a layered model at the moment of 0.5 s generated by the SEM-FDM (a) and SEM (b)

合方法的模拟结果与参考波形(6 阶 SEM 计算得到)高度一致, 相对误差在 1% 左右, 这说明 SEM-FDM 混合方法能较好地处理含速度间断面的模型。

### 3.3 起伏地表模型

为了检验 SEM-FDM 混合方法对起伏地表模型的处理能力, 设计了如图 10 所示的起伏地表模型。模型分为两层, 每层介质参数与 3.2 节中模型相同。一个爆炸震源位于(1 000 m, 100 m)处, 震源时间函数是频率为 15 Hz 的雷克子波。200 个接收器均匀放置于地表, 其平均水平间隔为 16 m。

单炮地震记录模拟结果如图 11 所示。图 11a 和 11d 是由 SEM-FDM 混合方法计算得到; 为了对比需要, 图 11b 和 11e 展示了 5 阶 SEM 的计算结果, 可见 SEM-FDM 混合方法与 SEM 的计算结果具有很好的一致性; 图 11c 和 11f 展示了两种方法模拟结果的相对差, 可见相对差在 0.8% 以内。通过对比可见, SEM-FDM 混合方法既保持了 SEM 对起伏地表的处理能力, 又能高精度模拟起伏地表模型中的地震波传播。

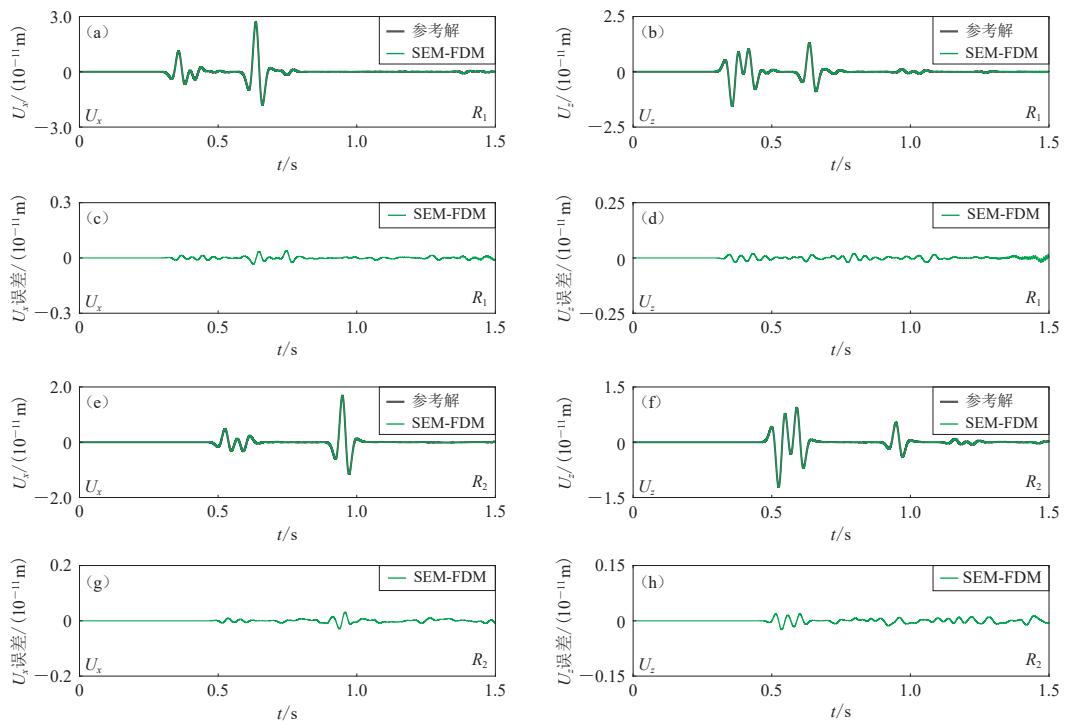


图 9 混合方法得到的合成地震记录与参考解对比

(a, b)  $R_1$  处合成位移水平分量和垂直分量; (c, d)  $R_1$  处合成位移波形水平分量和垂直分量的误差;(e, f)  $R_2$  处合成位移水平分量和垂直分量; (g, h)  $R_2$  处合成位移波形水平分量和垂直分量的误差

Fig. 9 Comparison of synthetic seismograms generated by the SEM-FDM hybrid method with reference solutions  
 (a, b) The horizontal and vertical components of displacements recorded at the  $R_1$ , respectively; (c, d) The errors of the horizontal and vertical components of the displacements at the  $R_1$ ; (e, f) The horizontal and vertical components of displacements at the  $R_2$ ; (g, h) The errors of the horizontal and vertical components of the displacements at the  $R_2$

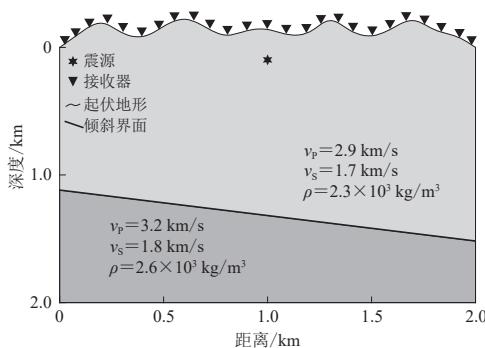


图 10 用于地震波场模拟的含起伏地表的层状模型

Fig. 10 A layered model with undulate surface used for simulation of seismic wavefields

### 3.4 龙门山断裂带地壳模型

选取龙门山断裂带地壳模型(图 12)来检验 SEM-FDM 混合方法在实际地质模型中的地震波模拟能力. 图 12 显示龙门山断裂带东西两侧的地形相差较大, 东侧的高程较低, 西侧的高程较高. P 波(图 12b)和 S 波(图 12c)速度结构来源于川滇地区速度模型 2.0 (Liu *et al.*, 2023). 选取二维垂直剖面 AB (如图 12a 中红色线所示)用于正演合成测试. 一个爆炸震源位于(110 km, 13 km), 震源时间函数是主频为 1 Hz 的雷克子波. 两个接收器  $R_1$  和  $R_2$  分别位于(77.4 km, -3.4 km)和(136.4 km, -0.6 km)(其中  $z$  坐标的负值

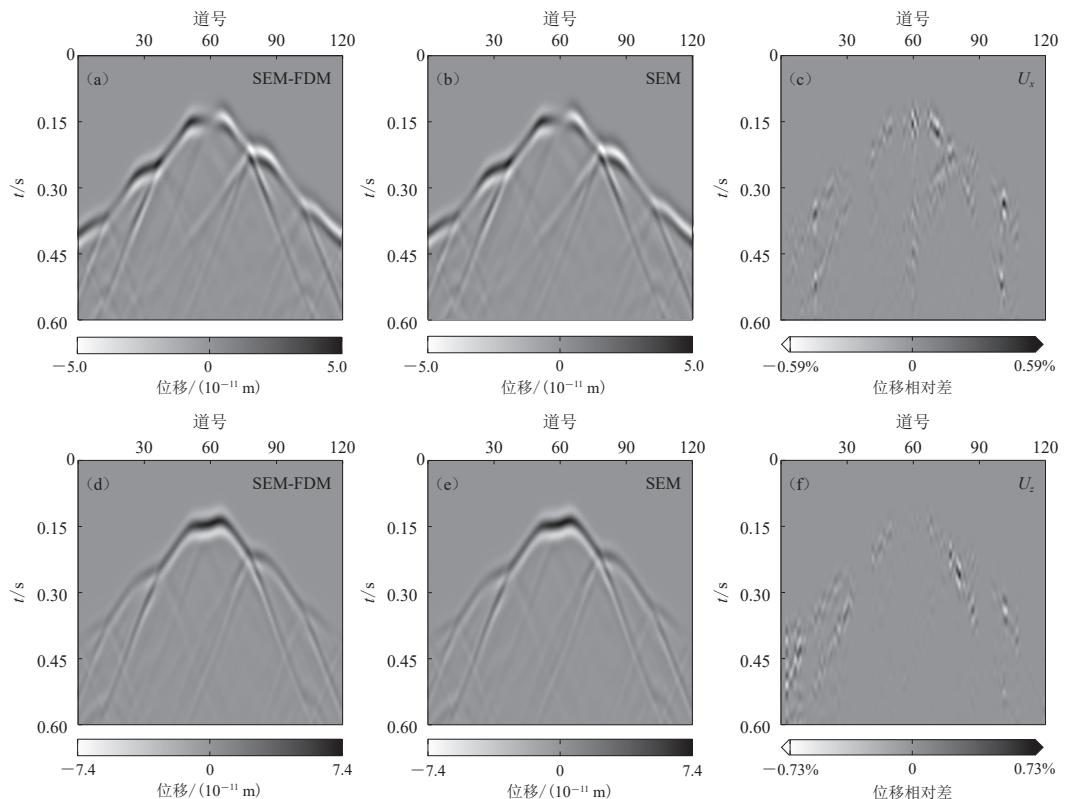


图 11 SEM-FDM 混合方法计算的单炮地震记录与 SEM 计算结果对比

图(a)和(b)分别为 SEM-FDM 和 SEM 方法计算的位移水平分量, 图(c)为其相对差;

图(d)和(e)分别为 SEM-FDM 和 SEM 方法计算的位移垂直分量, 图(f)为其相对差

Fig. 11 A comparison of single shot seismograms generated by the SEM-FDM hybrid method and SEM

Plots (a) and (b) show displacement wavefield horizontal component by the SEM-FDM and SEM, respectively,

and plot (c) shows the relative differences between the wavefields shown in plots (a) and (b). Plots (d) and (e)

display displacement wavefield vertical component by the SEM-FDM and SEM, respectively, and plot (f)

displays the relative differences between the wavefields shown in plots (d) and (e)

表示海平面之上). SEM-FDM混合方法在深度 5 km 之上利用 SEM 计算, 网格单元的平均尺寸为 800 m, 在 5 km 深度之下采用 FDM 计算, 网格间隔为 320 m, 数据交换区位于 5 km 深度附近。

SEM-FDM 混合方法的地震波数值模拟结果如图 13 和 14 所示. 为了对比需要, 图 13 和 14 也展示了 5 阶 SEM 的数值模拟结果. 可见: SEM-FDM 混合方法得到的 13 s 时刻的波场快照显示了清晰的 P, pP 和 pS 震相, 波场模拟结果(图 13a 和 13c)与 SEM 模拟结果(图 13b 和 图 13d)一致.  $R_1$  和  $R_2$  处的合成波形模拟结果(图 14)表明 SEM-FDM 混合方法与 SEM 得到的合成波形具有很好的一致性. 以上模拟结果说明 SEM-FDM 能模拟复杂地壳模型中的地震波场.

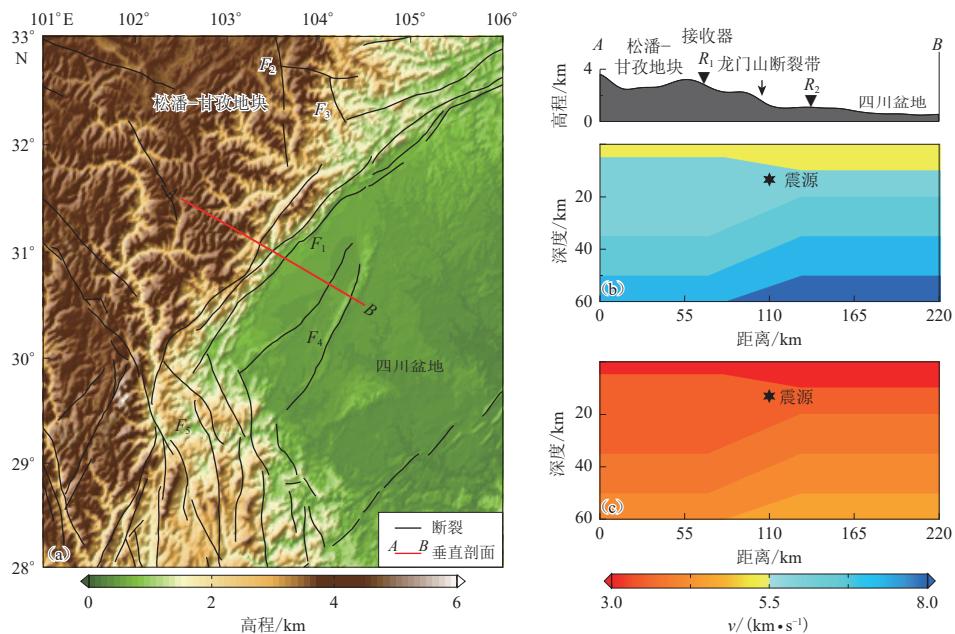


图 12 龙门山断裂带地壳模型

(a) 地质构造图.  $F_1$ : 龙门山断裂带;  $F_2$ : 岷江断裂;  $F_3$ : 虎牙断裂;  $F_4$ : 龙泉山断裂;  $F_5$ : 安宁河断裂; (b) P 波速度结构; (c) S 波速度结构

Fig. 12 The crustal model of the Longmenshan fault zone

(a) The topography around the Longmenshan fault zone.  $F_1$ : Longmenshan fault zone;  $F_2$ : Minjiang fault;  $F_3$ : Huya fault;  $F_4$ : Longquanshan fault;  $F_5$ : Anninghe fault; (b) P-wave velocity model; (c) S-wave velocity model

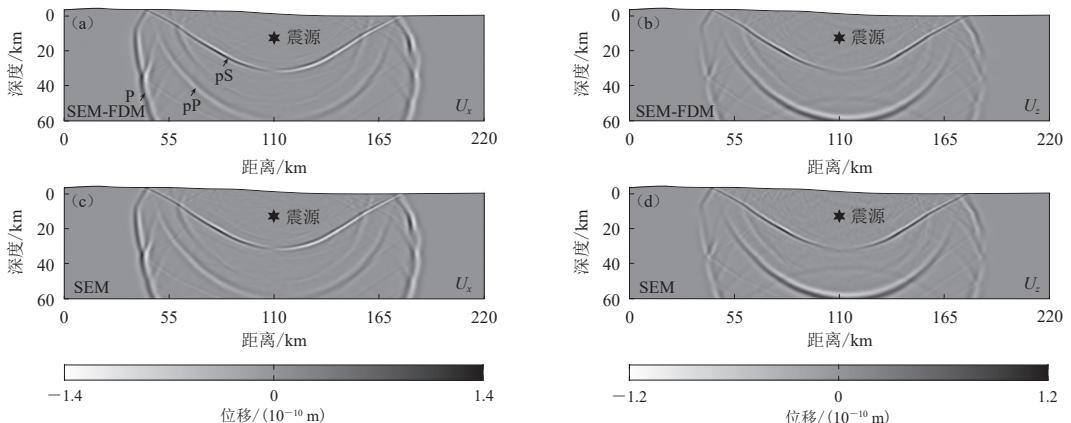


图 13 地壳模型中分别由 SEM-FDM 混合方法(a, b)和 SEM 方法(c, d)计算所得 13 s 时刻的位移波场水平分量(左)和垂直分量(右)快照

Fig. 13 Snapshots of horizontal (left) and vertical (right) components of displacement wavefields in the crustal model at the moment 13 s generated by SEM-FDM hybrid method (a, b) and SEM method (c, d)

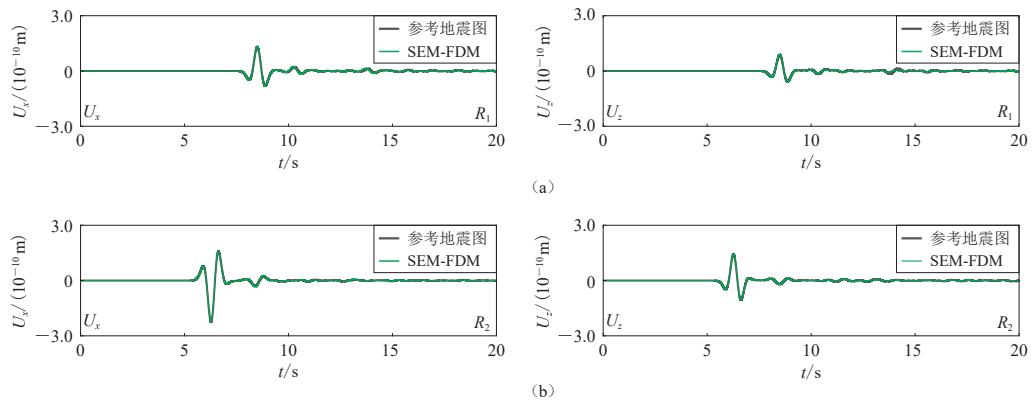


图 14 地壳模型中合成地震记录

左图为位移水平分量, 右图为位移垂直分量. 图(a)和(b)分别为  $R_1$  和  $R_2$  处的合成地震记录

Fig. 14 Synthetic seismograms in a crustal model

Left and right plots show synthetic seismograms of horizontal and vertical components, respectively.

Plots (a) and (b) present seismograms recorded by the  $R_1$  and  $R_2$

## 4 讨论与结论

本文提出了模拟地震波场的 SEM-FDM 混合方法, 该方法在接近地表区域采用 SEM 模拟地震波传播, 在远离地表区域采用 FDM 计算地震波场, 通过设置数据交换区将 SEM 与 FDM 耦合, 使得模型内部的位移连续. 发展 SEM-FDM 混合方法是为了简化网格建模, 即在网格建模时只用考虑起伏地表附近模型的非规则性, 在远离地表区域利用规则有限差分网格刻画模型内部界面. SEM-FDM 混合方法综合了 SEM 和 FDM 的各自优势, 可简单、便捷地模拟复杂模型中的地震波场. 通过四组数值算例证实了 SEM-FDM 混合方法模拟地震波场的有效性. 本文设计的地下介质模型相对简单, 主要是为了简化 SEM 的网格建模, 便于 SEM-FDM 混合方法计算结果与 SEM 对比. SEM-FDM 混合方法可适用于任意模型, 并不受模型的限制.

在利用 SEM-FDM 混合方法模拟地震波场过程中, 利用商业软件 Hypermesh (<https://www.altair.com>) 建立地表附近的 SEM 网格模型. 为了进一步提高网格建模效率, 可构造高阶多项式拟合地表地形, 在此基础之上自动生成 SEM 网格, 作者将另文介绍 SEM 网格自动生成技术. 基于网格自动生成技术, SEM-FDM 混合方法将成为一种高效的、便捷的正演模拟工具, 可模拟任意复杂介质中的地震波场.

在波形伴随成像过程中, 随着模型的迭代更新, 反演得到的速度模型与初始模型之间可能存在较大差别. 目前, 基于 SEM 的波形伴随成像在模型迭代过程中难以根据反演模型重新剖分网格. 由于 SEM 网格未能有效地刻画反演后的速度结构异常体, 这必然造成合成波形的精度较低, 进而影响成像结果. 本文的 SEM-FDM 混合方法利用较密的有限差分网格刻画速度结构的高波数成分, 因此无须在反演迭代过程中再重新划分网格. 作者将另文介绍基于 SEM-FDM 混合方法的波形伴随成像方法与软件.

## 参 考 文 献

- 刘少林, 杨顶辉, 徐锡伟, 李小凡, 申文豪, 刘有山. 2021. 模拟地震波传播的三维逐元并行谱元法[J]. 地球物理学报, **64**(3): 993–1005.
- Liu S L, Yang D H, Xu X W, Li X F, Shen W H, Liu Y S. 2021. Three-dimensional element-by-element parallel spectral-element method for seismic wave modeling[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, **64**(3): 993–1005 (in Chinese).
- 刘少林, 杨顶辉, 孟雪莉, 汪文帅, 徐锡伟, 李小凡. 2022. 模拟地震波传播的优化质量矩阵 Legendre 谱元法[J]. 地球物理学报, **65**(12): 4802–4815.
- Liu S L, Yang D H, Meng X L, Wang W S, Xu X W, Li X F. 2022. A Legendre spectral element method with optimal mass matrix for seismic wave modeling[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, **65**(12): 4802–4815 (in Chinese).
- 刘有山, 刘少林, 张美根, 马德堂. 2012. 一种改进的二阶弹性波动方程的最佳匹配层吸收边界条件[J]. 地球物理学进展, **27**(5): 2113–2122.
- Liu Y S, Liu S L, Zhang M G, Ma D T. 2012. An improved perfectly matched layer absorbing boundary condition for second order elastic wave equation[J]. *Progress in Geophysics*, **27**(5): 2113–2122 (in Chinese).
- 桑莹泉, 刘有山, 徐涛, 白志明, 解桐桐. 2021. 远震波场正演模拟方法及应用[J]. 地球与行星物理论评, **52**(6): 569–586.
- Sang Y Q, Liu Y S, Xu T, Bai Z M, Xie T T. 2021. Forward modeling method and application of teleseismic wavefield[J]. *Reviews of Geophysics and Planetary Physics*, **52**(6): 569–586 (in Chinese).
- 苏波, 李怀良, 刘少林, 杨顶辉. 2019. 修正辛格式有限元法的地震波场模拟[J]. 地球物理学报, **62**(4): 1440–1452.
- Su B, Li H L, Liu S L, Yang D H. 2019. Modified symplectic scheme with finite element method for seismic wavefield modeling[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, **62**(4): 1440–1452 (in Chinese).
- 祝贺君, 刘沁雅, 杨继东. 2023. 地震学全波形反演进展[J]. 地球与行星物理论评(中英文), **53**(3): 287–317.
- Zhu H J, Liu Q Y, Yang J D. 2023. Recent progress on full waveform inversion[J]. *Reviews of Geophysics and Planetary Physics*, **54**(3): 287–317 (in Chinese).
- Galis M, Moczo P, Kristek J. 2008. A 3-D hybrid finite-difference-finite-element viscoelastic modelling of seismic wave motion[J]. *Geophys J Int*, **175**(1): 153–184.
- Chen M, Niu F L, Liu Q Y, Tromp J, Zheng X F. 2015. Multiparameter adjoint tomography of the crust and upper mantle beneath East Asia: 1. Model construction and comparisons[J]. *J Geophys Res: Sol Ea*, **120**(3): 1762–1786.
- De Basabe J D, Sen M K. 2007. Grid dispersion and stability criteria of some common finite-element methods for acoustic and elastic wave equation[J]. *Geophysics*, **72**(6): T81–T95.
- De Hoop A T. 1959. The surface line source problem[J]. *Appl Sci Res*, **8**(4): 349–356.
- Komatitsch D, Tromp J. 2002. Spectral-element simulations of global seismic wave propagation: I. Validation[J]. *Geophys J Int*, **149**(2): 390–412.
- Komatitsch D, Vilotte J P. 1998. The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures[J]. *Bull Seismol Soc Am*, **88**(2): 368–392.
- Lan H Q, Zhang Z J. 2011. Comparative study of the free-surface boundary condition in two-dimensional finite-difference elastic wave field simulation[J]. *J Geophys Eng*, **8**: 275–286.
- Lei W J, Ruan Y Y, Bozdağ E, Peter D, Lefebvre M, Komatitsch D, Tromp J, Hill J, Podhorszki N, Pugmire D. 2020. Global adjoint tomography: Model GLAD-M25[J]. *Geophys J Int*, **233**(1): 1–21.
- Liu Y. 2014. Optimal staggered-grid finite-difference schemes based on least-squares for wave equation modelling[J]. *Geophys J Int*, **197**(2): 1033–1047.
- Liu S L, Li X F, Wang W S, Xu L, Li B F. 2015a. A modified symplectic scheme for seismic wave modeling[J]. *J Appl Geophys*, **116**: 110–120.
- Liu S L, Li X F, Wang W S, Zhu T. 2015b. Source wavefield reconstruction using a linear combination of the boundary wavefield in reverse time migration[J]. *Geophysics*, **80**(6): S203–S212.
- Liu S L, Yang D H, Ma J. 2017. A modified symplectic PRK scheme for seismic wave modeling[J]. *Comput Geosci-UK*, **99**: 28–36.

- Liu Y, Yu Z, Zhang Z Q, Yao H J, Wang W T, Zhang H J, Fang H J, Fang L H. 2023. The high-resolution community velocity model V2.0 of southwest China, constructed by joint body and surface wave tomography of data recorded at temporary dense arrays[J]. *Science China Earth Science*, **66**(10): 2368–2385.
- Ma J, Yang D H, Tong P, Ma X. 2018. TSOS and TSOS-FK hybrid methods for modelling the propagation of seismic waves[J]. *Geophys J Int*, **214**(3): 1665–1682.
- Ma X, Yang D H, Song G J, Wang M X. 2014. A low-dispersion symplectic partitioned Runge-Kutta method for solving seismic-wave equations: I. Scheme and theoretical analysis[J]. *Bull Seismol Soc Am*, **104**(5): 2206–2225.
- Marfurt K J. 1984. Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations[J]. *Geophysics*, **49**(5): 533–549.
- Moczo P, Robertsson J, Eisner L. 2007. The finite-difference time-domain method for modeling of seismic wave propagation[J]. *Adv Geophys*, **48**: 421–516.
- Rao Y, Wang Y. 2013. Seismic waveform simulation with pseudo-orthogonal grids for irregular topographic models[J]. *Geophys J Int*, **194**(3): 1778–1788.
- Shen W H, Yang D H, Xu X W, Yang S X, Liu S L. 2022. 3D simulation of ground motion for the 2015  $M_W$ 7.8 Gorkha earthquake, Nepal, based on the spectral element method[J]. *Nat Hazards*, **112**: 2853–2871.
- Tan P, Huang L J. 2014. An efficient finite-difference method with high-order accuracy in both time and space domains for modelling scalar-wave propagation[J]. *Geophys J Int*, **197**: 1250–1267.
- Tong P, Zhao D, Yang D, Chen J, Liu Q. 2014. Wave-equation-based travel-time seismic tomography: Part 1: Method[J]. *Solid Earth*, **5**(2): 1151–1168.
- Tromp J, Tape C, Liu Q Y. 2005. Seismic tomography, adjoint methods, time reversal and banana-doughnut kernels[J]. *Geophys J Int*, **160**(1): 195–216.
- Zhang J H, Yao Z X. 2013. Optimized finite-difference operator for broadband seismic wave modeling[J]. *Geophysics*, **78**(1): A13–A18.
- Zhang W Q, Zhang Z G, Fu H H, Li Z B, Chen X F. 2019. Importance of spatial resolution in ground motion simulations with 3-D basins: An example using the Tangshan earthquake[J]. *Geophys Res Lett*, **46**(21): 11915–11924.
- Zhou H, Liu Y, Wang J. 2021. Elastic wave modeling with high-order temporal and spatial accuracies by a selectively modified and linearly optimized staggered-grid finite-difference scheme[J]. *IEEE T Geosci Remote*, **60**(60): 1–22.