

# 球层中高阶自由热对流格局 及其变化的研究<sup>\*</sup>

朱 涛 冯 锐

(中国北京 100081 中国地震局地球物理研究所)

**摘要** 研究了下边界为应力自由边界, 上边界为刚性边界, 纯粹从底部加热的充满了无穷大普朗特数的 Boussinesq 流体的同心球层中的非线性自由热对流. 借鉴将极型场和扰动温度场展成勒让德多项式(以下称零级数模型, 即此时  $m=0$ )的方法, 将它们展成 6 阶 6 级(即  $l=6$ ;  $m=0, 1, 2, \dots, l$ )的勒让德函数(以下称高级数模型), 并用 Galerkin 方法求解非线性方程组, 获得了高级数模型的结果. 与零级数模型仅能获得表征物质垂直运移特征和扰动温度结构的二维南北向( $r-\theta$ )剖面相比, 高级数模型还得到了东西向( $r-\varphi$ )和深度剖面( $\theta-\varphi$ ), 而且对流运动的许多细特征得以体现, 有利于深化认识球层中自由热对流的特征及其导致的温度结构. 瑞利数的大小对自由热对流的格局和速率产生了重要的影响, 控制着对流层中高温热柱区和低温冷柱区的相对大小. 本文所得到的结果可能主要反映了下地幔物质运动, 其对流格局和速率在不同的位置上存在明显的差异, 可能蕴涵了重要的地球动力学含义.

**关键词** 非线性热对流 常粘度 Galerkin 方法

**中图分类号**: P314.2

**文献标识码**: A

## 引言

地幔对流被认为是地球内部热传递的最有效方式和岩石圈板块运动的动力源(Elsasser, 1971). 现代岩石圈板块运动存在极型和环型成分, 在球体模型中分别对应于垂直方向(即径向)和水平方向的运动. 位于地球表面的板块间的漂移、会聚、裂解与旋转运动都是环型分量的典型表现, 而地幔物质的上下迁移运动则清楚地表现了极型分量的特征. 极型和环型分量是耦合在一起的, 二者的功率几乎相等(Hager, O'Connell, 1978; Minister, Jordan, 1978; Forte, Peltier, 1987; Fu, 1989), 它们完整地描述了板块运动的整体特征, 因此作为板块动力源的地幔对流, 必须对之作出合理的解释.

极型场产生的机制已经基本清楚了, 它是与地幔内部横向密度差异联系着的地幔流动的直接产物. 在具有齐次边界(刚性或应力自由边界)的地幔对流模型中, 只要假定地幔粘度为常量或仅随深度变化, 就可以获得极型场分量. 它能在很大程度上揭示了地幔物质运动的基本特征和拟合了某些地表观测数据(傅容珊, 1990; 傅容珊, 黄建华, 1993; 傅容珊等, 1994, 2002, 2003; 叶正仁等, 1993, 1995; 王景贇等, 2000; 孙荀英等, 2002; Richter, 1973; Chase, 1979; Bercovici *et al*, 1989), 但这种模型不能产生环型分量. 显

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金重点项目(49834020)资助. 中国地震局地球物理研究所论著 05AC1001.  
2003-10-14 收到初稿, 2004-03-06 收到修改稿, 2004-05-08 决定采用.

然,这偏离了真实地球板块运动的状态.如果将上边界假定为具有一定速度量的刚性边界,则即使地幔粘度为常数或仅随深度变化,仍然可以同时获得极型场和环型场分量(Hager, O'Connell, 1979, 1981; Richard, Vigny, 1989; Fu, Huang, 1992; 叶正仁, 朱日祥, 1996).但是它引起了板块运动和地幔对流的地位之争,迄今尚无定论(朱涛, 2003).地震层析成像揭示的欧亚大陆北部的长波长重力异常的相关性表明,上地幔粘度存在横向变化(Kogan, McNutt, 1993).近年来,许多研究者(Richards, Hager, 1989; Stewart, 1992; Ribe, 1992; King, 1994; Zhong, 1996; Birger, 1998; Zhong, Zuber, 2000; 叶正仁, 王建, 2003)把它引入到地幔对流的模型中,研究结果清楚地表明,一旦地幔粘度存在横向变化时,不仅能产生导致板块极型运动的地幔对流的极型场,更重要的是还能产生导致板块环型运动的地幔对流的环型场.虽然数值模拟所得到的环型场的功率还远不能拟合板块运动中的环型分量的大小,但它可能对大地水准面异常、重力异常、地形起伏以及地幔对流的形态和结构产生重大的影响(Richards, Hager, 1989; Christensen, Harder, 1991; Ribe, 1992; King, 1994; Zhong, 1996; Zhong, Zuber, 2000; 叶正仁, 王建, 2003),且对后人的研究工作极具启发性.这一研究思路有可能在寻求某些全球构造现象的动力学解释方面起到重要作用.

一般情况下,在发展球层变粘度热对流模型时,有必要从非线性常粘度对流模型的底层工作做起,特别要对瑞利数的影响、非线性高阶高级项的作用以及对流模式的特征等等进行详细的对比和研究.事实上,很多研究者已经做了十分有意义的工作. Zebib 等(1980)以及 Schubert 和 Zebib(1980)把球层中非线性自由热对流的极型场和扰动温度场展成  $l$  阶勒让德多项式进行求解,详细研究了纯粹从球层底部、球层内部和混合(部分从底部,部分从内部)加热,内外边界均为应力自由和等温边界情形下球层中非线性自由热对流的特征.叶正仁等(1995)将极型场和扰动温度场展成  $l$  阶  $m$  次的缔合勒让德函数(当  $m=0$  时,则为勒让德多项式,即零级数模型),进一步研究了纯粹从底部加热,下边界为应力自由边界,上边界为刚性边界的情形,给出了零级数模型的计算结果,并对其地球物理含义作了讨论.由于零级数模型所获得的南北向剖面的二维信息,只揭示了地幔物质垂直运动的部分特征,为了深化对球层中自由热对流特征的认识,本研究将之推广到 6 阶 6 级的高级数模型,得到了一些新结果:给出了南北向、东西向和深度剖面的三维信息,它们提供了地幔物质运动状态的细特征.在计算中尽量采用了接近于真实地球地幔的参数,对比了不同瑞利数的对流剖面.研究表明,瑞利数在非线性自由热对流中具有重要的影响.随着瑞利数的增大,对流的速率加快,热对流会逐渐成为球层中的主要传热方式,高温热柱区扩张,对流胞的数目增多;对流形态和速率在不同位置和深度存在明显的差异,这可能蕴涵了重要的地球动力学含义.

## 1 基本方程

参照 Zebib 等(1980)、叶正仁等(1995)以及傅容珊和黄建华(1993)的表述方式,假定内径为  $R_1$ , 外径为  $R_2$  的同心球层中充满了无穷大普朗特数( $Pr = \nu/\kappa$ ,  $\nu$  为运动学粘度,  $\kappa$  是热扩散系数.地球地幔的普朗特数约为  $10^{23}$ )的不可压缩的牛顿流体,只考虑从底部加热的方式,同时 Boussinesq 近似成立(仅考虑作用于流体质点上的外力项中的密度随温度变化,其它项中的密度变化可以忽略),则稳定状态下,控制球层中对流的无量纲化的连续性

方程、动量方程和热传输方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1a)$$

$$-\nabla P + \nabla^2 \mathbf{u} + Ra \tilde{\mathbf{r}} = 0 \quad (1b)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla (T_c + \tilde{T}) = \nabla^2 \tilde{T} \quad (1c)$$

在式(1a)~(1c)中, 采用了无量纲化因子  $d = R_2 - R_1$ ,  $\kappa/d$ ,  $d^2/\kappa$  和  $\Delta T = T_1 - T_2$  分别对半径  $r$ 、速度  $\mathbf{u}$ 、时间  $t$  以及温度进行了无量纲化. 其中,  $T_1$ ,  $T_2$  分别为内径  $R_1$ 、外径  $R_2$  处的恒定温度,  $T_1 > T_2$ ;  $P$  为压力;  $T_c$  是无对流运动时的温度场, 仅是径向  $r$  的函数, 满足热传导方程  $\nabla^2 T_c = 0$ ;  $\tilde{T}$  称为扰动温度, 即由对流运动引起的相对无对流状态时的温度场的偏离;  $\hat{\mathbf{r}}$  是径向上的单位矢量;  $Ra$  是瑞利数, 定义为

$$Ra = \frac{\alpha \rho_0 g \Delta T d^3}{\eta_0 \kappa} \quad (2)$$

其中,  $\alpha$ ,  $\rho_0$ ,  $\eta_0$  和  $g$  分别为热膨胀系数、流体平均密度、流体平均粘度和重力加速度.

对流的速度场可以用极型场  $\Phi$  和环型场  $\Psi$  的标量函数来表示 (Buckus, 1958). 本文只研究下边界为应力自由边界, 上边界为刚性边界的情形. 这是齐次边界, 因此相应的速度场的环型场分量为 0, 仅有极型场分量. 记半径为  $r$ 、余纬度为  $\theta$ 、经度为  $\varphi$ , 微分算子

$$\Lambda^2 = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

在满足连续性方程(1a)的条件下, 则速度场分量可用极型场标量函数  $\Phi$  表示为

$$u_r = \frac{1}{r} \Lambda^2 \Phi \quad (3a)$$

$$u_\theta = - \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (3b)$$

$$u_\varphi = - \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (3c)$$

在式(1b)两端施加算子  $(\Lambda \cdot \nabla \times)$  后将式(3)代入, 可推得

$$\nabla^4 \Lambda^2 \Phi = \frac{-Ra \Lambda^2 \tilde{T}}{r} \quad (4a)$$

相应边界条件为

$$\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 0 \quad \tilde{T} = 0 \quad (r = r_1) \quad (4b)$$

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad \tilde{T} = 0 \quad (r = r_2) \quad (4c)$$

其中,  $r_1$ ,  $r_2$  分别为无量纲化的球层内径和外径. 将极型场函数  $\Phi$  和扰动温度场  $\tilde{T}$  展成

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \phi_l^m(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (5a)$$

$$\tilde{T}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \tilde{T}_l^m(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (5b)$$

此处  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  为全面正规化的  $l$  阶  $m$  级面谐函数, 形式为 (梁昆森, 1978)

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = N_l^m P_l^m(\cos\theta) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix}$$

$$N_l^m = \sqrt{\frac{(2l+1)(1-m)!}{2\pi\delta_m(l+m)!}} \quad \delta_m = \begin{cases} 2 & (m=0) \\ 1 & (m \neq 0) \end{cases}$$

其中,  $P_l^m(\cos\theta)$  是  $l$  阶  $m$  级的缔合勒让德函数. 而式(5)中的球谐系数  $\phi_l^m$  和  $\tilde{T}_l^m$  可设为(叶正仁等, 1995; Zebib *et al*, 1980)

$$\tilde{T}_l^m = \sum_j \Theta_{lj}^m(t) W_j(r) \quad (6a)$$

$$\phi_l^m = Ra \sum_j \Theta_{lj}^m(t) f_{lj}(r) \quad (6b)$$

其中,  $W_j(r)$  和  $f_{lj}(r)$  分别为扰动温度场  $\tilde{T}$  和对流极型场  $\Phi$  的球谐系数的基函数. 速度场的求解可分为 3 步: 首先确定基函数  $W_j(r)$  和  $f_{lj}(r)$ ; 然后求系数  $\Theta_{lj}^m$ ; 最后将基函数  $W_j(r)$ ,  $f_{lj}(r)$  和系数  $\Theta_{lj}^m$  代入式(5)和(6), 便能获得扰动温度场的分布和极型场的标量场, 结合式(3)之后, 可获得对流速度场分布. 对于基函数  $W_j(r)$ , 通常取  $W_j(r) = \sqrt{2}\sin[j\pi(r-r_1)]$ , ( $j=1, 2, 3\cdots$ ), 则  $\Theta_{lj}^m$  自然满足关于温度的边界条件. 而  $f_{lj}(r)$  基函数则需对下述变换所得的式(7)求解才能得到. 把式(5)和(6)代入(4a)中, 便得到

$$D_l^2 f_{lj}(r) = -\frac{W_j(r)}{r} \quad (7a)$$

相应的边界条件由式(5)和(6)代入(4b)和(4c)有

$$f_{lj}(r) = \frac{d^2 f_{lj}(r)}{dr^2} = 0 \quad (r=r_1) \quad (7b)$$

$$f_{lj}(r) = \frac{df_{lj}(r)}{dr} = 0 \quad (r=r_2) \quad (7c)$$

其中, 算子  $D_l = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}$ . 在求解系数  $\Theta_{lj}^m$  的方程组(8)时, 可将式(5)和(6)代入(1c)后可得到

$$\sum_j \alpha_{lkj} \Theta_{lj}^m = Ra \sum_j \beta_{lkj} \Theta_{lj}^m + \int_{r_1}^{r_2} (\mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{T})_l^m W_k(r) dr \quad (8)$$

如记积分球面为  $\sigma$ , 则式(8)中的非线性项为

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} (\mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{T})_l^m W_k dr = & -Ra \sum_{l_1, m_1} \sum_{l_2, m_2} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \left\{ \Theta_{l_1 j_1}^{m_1} \Theta_{l_2 j_2}^{m_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{l_2(l_2+1)}{r} \frac{dW_{j_1}}{dr} W_k f_{l_2 j_2} dr \times \right. \\ & \int_{\sigma} Y_{l_1}^{m_1} Y_{l_2}^{m_2} Y_l^m d\sigma + \int_{r_1}^{r_2} W_{j_1} W_k \frac{1}{r} \left( \frac{df_{l_2 j_2}}{dr} + \frac{f_{l_2 j_2}}{r} \right) dr \times \\ & \left. \int_{\sigma} \left( \frac{\partial Y_{l_1}^{m_1}}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{l_2}^{m_2}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial Y_{l_1}^{m_1}}{\partial \varphi} \frac{\partial Y_{l_2}^{m_2}}{\partial \varphi} \right) Y_l^m d\sigma \right\} \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\alpha_{lkj} = \int_{r_1}^{r_2} W_k D_l W_j dr \quad (9b)$$

$$\beta_{lkj} = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{l(l+1)}{r} \left( \frac{-r_1 r_2}{r^2} \right) W_k f_{lj} dr \quad (9c)$$

求解式(8)即可得到系数  $\Theta_{lj}^m$ , 计算中的主要困难在于对其右端第二项即非线性项的处理, 它在式(8)中的作用直接依赖于瑞利数的大小. 当瑞利数  $Ra$  不大于最小临界瑞利数  $Ra_c$  (在本研究的  $R$ - $F$  模型下约为 1 362.4) 的 1.5 倍时, 式(8)中的非线性项可以忽略. 从

而变为线性方程组, 可获得解析解(傅容珊, 1990; 傅容珊等, 1992; 傅容珊, 黄建华, 1993). 随着瑞利数加大, 非线性项的影响会越来越显著, 因此, 在真实地球地幔的瑞利数的量级约为  $10^5 \sim 10^8$  之间的条件下, 式(8)就为一非线性方程组(叶正仁等, 1993). 对于高级数模型, 可以从一系列的南北向剖面( $r-\theta$ )、东西向剖面( $r-\varphi$ )和深度剖面( $\theta-\varphi$ )上来认识球层中非线性自由热对流的整体特征; 而对于零级数模型, 仅可获得二维南北向( $r-\theta$ )剖面(Zebib *et al*, 1980; Schubert, Zebib, 1980).

## 2 数值计算和结果分析

### 2.1 临界瑞利数 $Ra_c$

式(4a)右端项表明, 在地幔粘度为常数或仅随深度变化的情形下, 环型场分量为 0 (Christensen, Harder, 1991; 叶正仁等, 1995; 傅容珊等, 2002, 2003). 而产生极型场分量的唯一源就是含有瑞利数的浮力项, 因此, 浮力的作用便成为热对流运动的主要驱动力, 而瑞利数  $Ra$  的大小也就在控制对流运动上占有重要的地位. 表征球层中对流起始的临界瑞利数  $Ra_c$  可通过忽略式(8)中非线性项后的求解来得到. 图 1 给出了临界瑞利数  $Ra_c$  随着球谐阶数  $l$  的变化曲线. 曲线的下方为稳定区, 上方为非稳定区. 临界瑞利数  $Ra_c$  的最小值出现在  $l=4$  的位置, 为 1 362.4, 尔后随着球谐阶数的增高而急剧加大. 图 1 反映出的物理意义是十分深刻的. 首先, 球层内对流的发生只有在瑞利数  $Ra$  落入非稳定区域(大于临界瑞利数  $Ra_c$ )时才会出现, 即只有在球层上下边界的温度差超过某一最小值, 或者流体粘度低于某一临界值时, 此时的浮力才足以克服粘滞阻力的作用而驱动流体运动, 否则仅存在静态的热传导过程. 其次, 临界瑞利数随球谐阶数  $l$  的变化会影响到对流胞的大小及其长宽比. 由于 2~4 阶的谐波分量只反映着下地幔物质运动的信息(Schubert *et al*, 2001), 故欲揭示出包含上地幔的对流状态时, 球谐展开的阶数必须扩到更高, 而相应的瑞利数必须有更大的值才能满足要求. 本研究的模型中, 将待求参数展成 6 阶 6 级的勒让德函数, 即  $l_{\max}=6$ , 同时取  $j_{\max}=k_{\max}=6$ , 以及  $R_1=3\,471\text{ km}$ ,  $R_2=6\,271\text{ km}$ (它们分别对应于核幔边界和岩石圈底界面的位置), 瑞利数选取  $3 \times 10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  和  $10^6$ . 根据

式(8)和式(9)构成的关于  $\Theta_{ij}^m$  的一组非线性方程组, 在 Levenberg-Marquardt 算法的基础上, 结合从 Zebib 等(1980)、Schubert 和 Zebib(1980)以及叶正仁等(1995)的研究结果中获得的先验信息——扰动温度场  $\tilde{T}$  和极型速度场  $\Phi$  的南北向剖面( $r-\theta$ )关于赤道面对称, 依此采用人机对话式的杂交遗传思想来产生新模型, 即先给定几组初值, 经迭代获得相应的解, 作出扰动温度场的等值线图, 然后选出两组值, 让对应项相加, 从而获得新的初值, 由此分别得到了零级数( $m=0$ )和高级数( $m=0, 1, 2, \dots, l$ )模型的结果. 经对比, 零级数模型的结果与叶正仁等(1995)的结果一致. 本文将侧重于高阶高级项

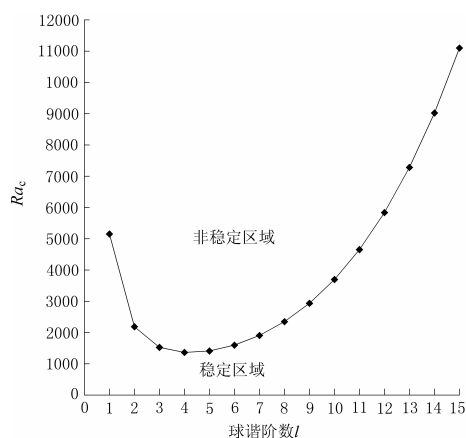


图 1 临界瑞利数  $Ra_c$  随着球谐阶数  $l$  的变化曲线

结果的分析.

2.2 平均温度  $T_m$

平均温度  $T_m$  可以表征对流的状态、不同瑞利数下温度扰动的大小和球层中低温冷、高温热柱区的相对大小, 是一个重要的物理量. 定义为 (Zebib *et al*, 1980; 叶正仁等, 1995)

$$T_m = T_c + \langle \tilde{T} \rangle \tag{10a}$$

其中,  $\langle \tilde{T} \rangle$  是扰动温度场在不同深度处的平均值.

$$T_c = \frac{r_1 r_2}{r} - r_1 \tag{10b}$$

$$\langle \tilde{T} \rangle = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{T}(r, \theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \tag{10c}$$

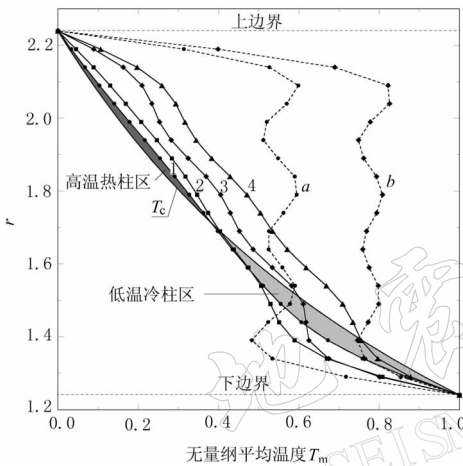


图 2 不同瑞利数下无量纲平均温度  $T_m$  和无对流运动时的温度场  $T_c$  随半径  $r$  的变化曲线  
曲线 1, 2, 3 和 4 为高级数模型的平均温度曲线:

- 1.  $Ra = 3 \times 10^3$ ; 2.  $Ra = 10^4$ ; 3.  $Ra = 10^5$ ;
- 4.  $Ra = 10^6$ . a 和 b 为零级数模型的两条曲线: a.  $Ra = 10^5$ ; b.  $Ra = 10^6$

的曲线 1 和 2, 即瑞利数分别为  $Ra = 3 \times 10^3$  和  $10^4$ ), 球层中存在着大量的冷柱, 因而占有绝对的优势, 反映出对流运动非常弱, 主要以热传导方式传热. 但是当瑞利数增加时, 热柱的影响区域逐渐扩张, 最终改变了当初的格局而占有绝对的优势, 反映出球层中对流循环作用加强, 对流传热变成了球层中的主要方式; 式(10c) 还表明, 扰动温度的平均值  $\langle \tilde{T} \rangle$  是对球层半径  $r$  处球层面积的加权平均值. 由于高级数模型中同一半径处的扰动温度场会存在较强的横向变化分量, 其正负异常的求和平均会表现为同一瑞利数的  $\langle \tilde{T} \rangle$  的绝对值, 比零级数模型的结果要明显减小(见图 2 中的曲线 3 和 a 或曲线 4 和 b).

2.3 南北向的扰动温度和对流剖面

图 3 给出了两条南北向的扰动温度剖面. 其共同特点是, 在小瑞利数时(如  $Ra = 3 \times 10^3$ ), 负向温度扰动( $\tilde{T} < 0$ ) 的区域远远大于正向扰动( $\tilde{T} > 0$ ) 的区域, 冷柱在球层中

图 2 显示了无量纲的热对流平均温度  $T_m$  和纯传导温度场  $T_c$  随球层半径  $r$  的变化曲线. 两条曲线的差即为  $\langle \tilde{T} \rangle$ , 它的大小和分布特征揭示出了有关热对流状态和热传输的重要信息. 以图 2 中  $Ra = 3 \times 10^3$  的曲线 1 为例, 当曲线 1 位于曲线  $T_c$  的上方时,  $\langle \tilde{T} \rangle > 0$ , 反映了温度相对于无对流状态时升高, 为高温热柱区(图中阴影区); 反之,  $\langle \tilde{T} \rangle < 0$  则为低温冷柱区(图中斜线区); 在曲线 1 和曲线  $T_c$  相交处,  $\langle \tilde{T} \rangle = 0$ , 该交点即为深度转换点(简称转换点). 可以看出, 当对流存在时, 下边界附近的温度都相对降低( $\langle \tilde{T} \rangle < 0$ ), 而在上边界附近的温度相对升高( $\langle \tilde{T} \rangle > 0$ ), 这是因为对流循环系统中的冷柱下降和热柱上升所致; 随着瑞利数的增大和减小, 转换点的深度会加深和变浅, 并且球层中流体的对流状态以及低温冷柱和高温热柱区域的相对大小会发生变化: 当瑞利数小到低温冷柱区大于高温热柱区时(图中的

占有绝对优势，流体对流运动很弱，由对流传热的热量比静态热传导的小得多，几个孤立的高温扰动区位于下地幔中部；但随着瑞利数的增大，负向温度扰动的区域越来越小，而正向温度扰动区域逐渐扩张，最终使得在小瑞利数时的格局发生了逆转，表明对流循环作用加强，对流速率加快，对流传热的地位逐渐提升为球层中热传输的主要方式；当瑞利数增大到一定程度时，球层中出现了明显的层状结构特征，特别是在靠近上下两个边界处的层状结构逐渐会趋于稳定；随着级数  $m$  的增大，扰动温度剖面的一些细节得以显现，与零级数模型的 2 个正向 3 个负向的温度扰动中心相比，各剖面中均多了 1 个正向和 1 个负向温度扰动中心。

不同  $\varphi$  值的南北向( $r-\theta$ ) 扰动温度剖面也存在明显的差异(图 3a, b). 在低瑞利数, 如  $Ra = 3 \times 10^3$  时,  $\varphi = 45^\circ$  的温度剖面比  $\varphi = 0^\circ$  的少了 1 个正向温度扰动中心, 多了 1 个负向温度扰动中心, 而且正、负向温度扰动中心的位置差异甚大. 图 3a 中的 2 个正向温度扰动中心分别位于  $\theta = 40^\circ$  和  $140^\circ$ , 3 个负向温度扰动中心分别位于  $\theta = 20^\circ, 90^\circ$  和  $160^\circ$ ; 而图 3b 中的 1 个正向温度扰动中心位于  $\theta = 90^\circ$ , 4 个负向温度扰动中心分别位于  $\theta = 20^\circ, 60^\circ, 120^\circ$  和  $160^\circ$ . 但是随着瑞利数的增大, 相应扰动温度剖面中的差异减小. 这些现象说

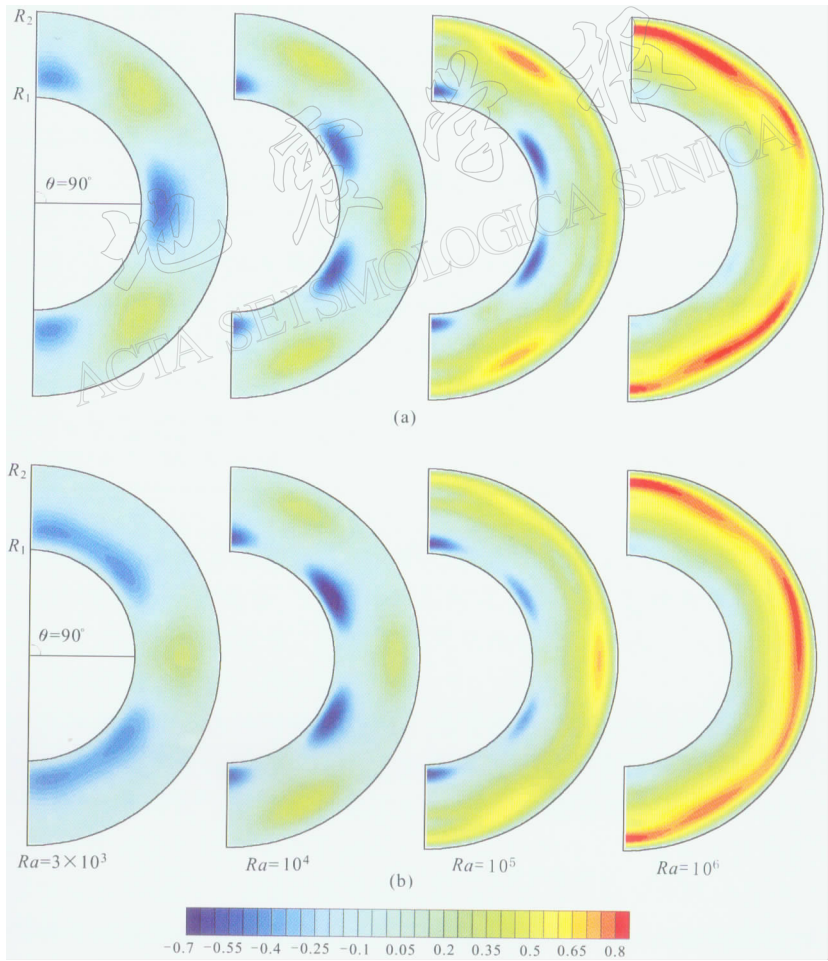


图 3 不同瑞利数的温度扰动剖面. (a)  $\varphi=0^\circ$ ; (b)  $\varphi=45^\circ$

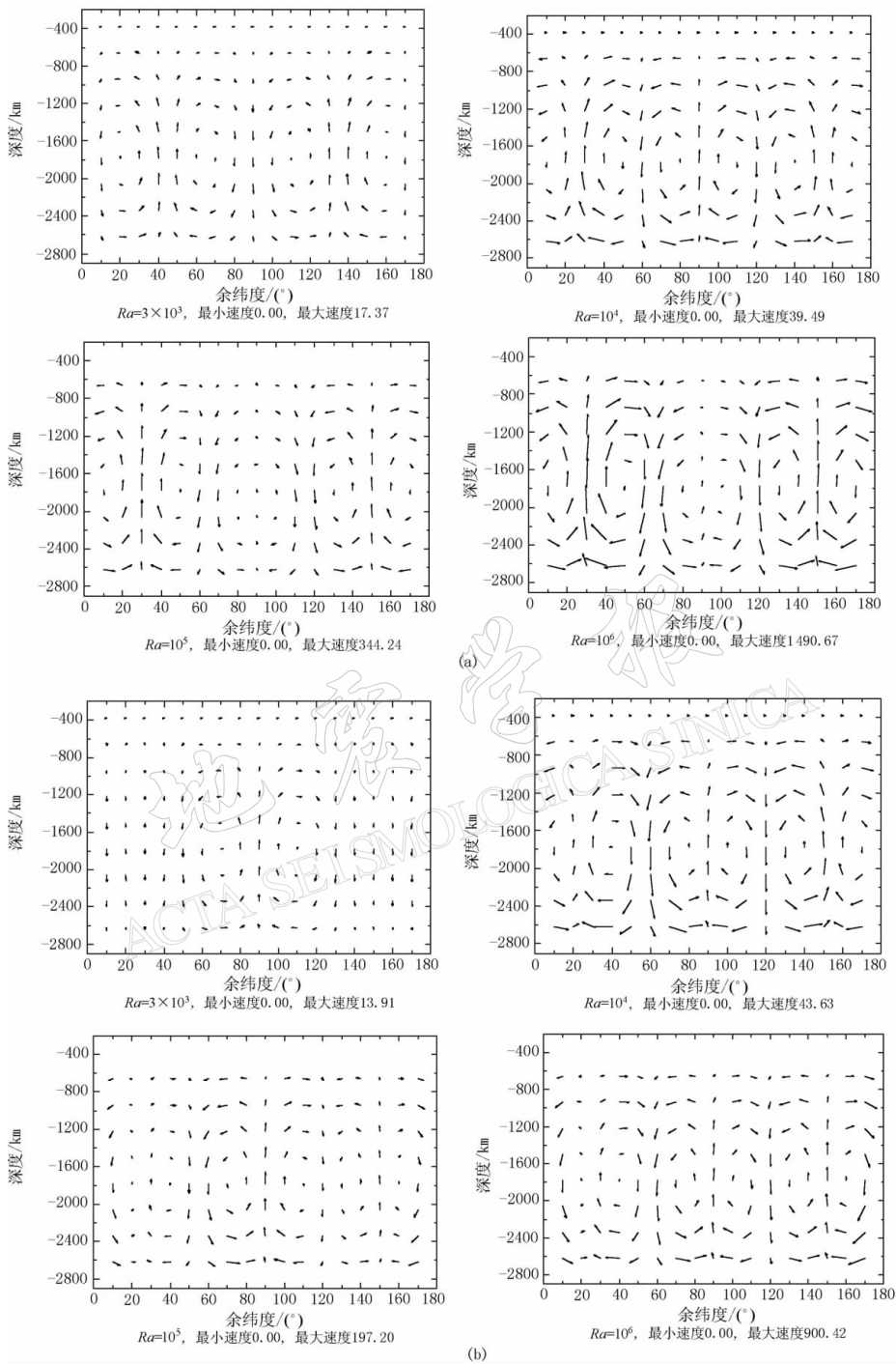


图 4 不同瑞利数的对流图像. (a)  $\varphi=0^\circ$ ; (b)  $\varphi=45^\circ$

明，沿着不同  $\varphi$  的切面具有不同的扰动温度分布，从而具有不同的温度分布形态。

图 4 是相应的对流剖面，图中已经注明了各模型的瑞利数和流体流动的最大、最小速度值。瑞利数对于对流的速率和图样的影响非常大。尽管对流胞的中心点基本稳定在



1 800 km附近的深度上,但随着瑞利数的增大,对流胞由低瑞利数( $Ra=3\times 10^3$ )的4个(图4a)或2个(图4b)演化为6个( $Ra=10^6$ );对流速率加大约两个数量级;对流胞能够扰动到的顶部深度从1 000 km左右明显抬升,在 $Ra=10^5\sim 10^6$ 时达到600 km附近.而在这个深度以浅形成了一个几乎静止的刚性板块状的盖层,与下地幔强烈的对流运动形成了极大的反差.

## 2.4 东西向的扰动温度和对流剖面

图5a, b给出了余纬 $\theta=60^\circ$ 和 $90^\circ$ (即赤道面)的两个平行剖面的扰动温度分布.这两个图中的扰动温度剖面均关于 $\varphi=180^\circ$ 的子午面对称;随着瑞利数的增大,负向温度扰动的冷区域缩小,正向温度扰动的热区域扩张,层状结构也变得越来越明显; $\theta=60^\circ$ 的扰动温度剖面具有4个正向和4个负向温度扰动中心,但随着纬度的减小,到了 $\theta=90^\circ$ 时,则演化为5个正向和5个负向(2个主要的,3个次要的)的温度扰动中心.两个平行的扰动温度剖面的差异给我们提供了一个直观的认识,那就是温度剖面随着纬度的不同而存在差异.当我们进一步对比它们的对流速度分布(图6a, b)时,更可以看到纬度效应的显著性,低纬度( $\theta=90^\circ$ )流体流动的速率明显高于高纬度( $\theta=60^\circ$ )的速率,对流胞的数目也增多.

## 2.5 深度上的扰动温度和对流剖面

图7显示了不同深度处 $r=2.04$ (深度约为660 km,图7a)和 $1.34$ (深度约为2 620 km,图7b)的扰动温度剖面.它们表明,在球层浅部( $r=2.04$ ),由于对流循环中热柱的向上侵入,使得温度扰动均为正向扰动,而且随着瑞利数的增大,温度扰动的幅度加大;在球层深部( $r=1.34$ ),则以负向温度扰动为主,但随着瑞利数的增大,负向扰动的幅度显著减小,表明对流加强,高温热柱区的影响加大.

从对流剖面(图8)来看,对流强度随着瑞利数和深度的增加而增强.其最大速度与最小速度的比值在球层的下部(图8b)高达30~80倍,但在球层的浅部(图8a)就降低到17~20倍,即上地幔中的对流速率更加接近.不同深度的对流剖面在形态上差异很大,但同一深度的对流剖面形态非常相似.说明对大于 $10^5$ 的瑞利数来说,它们对对流形态的影响不大,而深度却对对流形态具有较大的影响.

# 3 讨论

本文对球层高阶自由热对流的研究中,虽然没有结合其它的地球物理观测资料,如地震三维成像和/或板块运动数据等,仅是对球层的几何参数、边界条件以及热动力学参数选取了尽可能接近真实地球的数值,但这些结果依然给出了一些令人关注的现象,并深化了对非线性自由热对流运动的一些认识.

瑞利数在高阶非线性自由热对流中扮演了重要角色,它反映了浮力在克服粘滞阻力而驱动流体运动时所需要的能量大小,决定了热量传递过程中热对流和热传导两种方式的相对地位和作用.只有在球层上下边界的温差足够大或粘度足够小时,浮力驱动物质运动才会成为可能,即流体的静止状态才会被破坏.对流运动发生时,扰动温度所表现出的相对于纯热传导温度曲线的偏离,导致了相对的高温热柱区和低温冷柱区的存在.它们的相对大小表明了地幔物质运移的强烈程度,即对流运动的强弱.因此,瑞利数的大小不但对对流的形态和速率产生了重要的影响,而且还控制着整个对流层中的高温热柱区和低温冷柱区的相对大小.

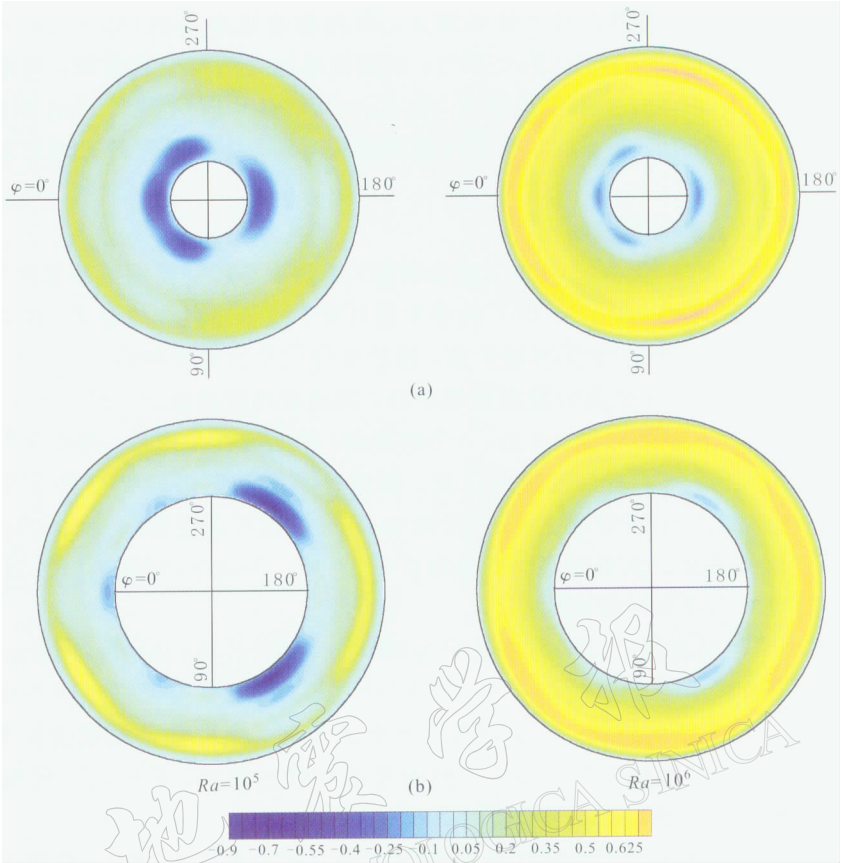


图 5 不同瑞利数的温度扰动剖面. (a)  $\theta=60^\circ$ ; (b)  $\theta=90^\circ$

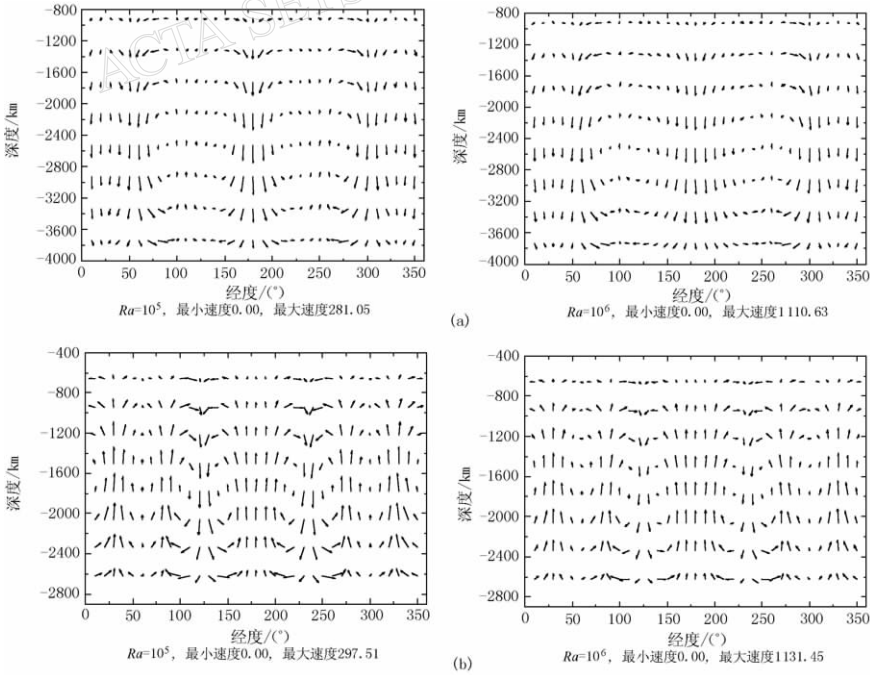


图 6 不同瑞利数的对流图象. (a)  $\theta=60^\circ$ ; (b)  $\theta=90^\circ$

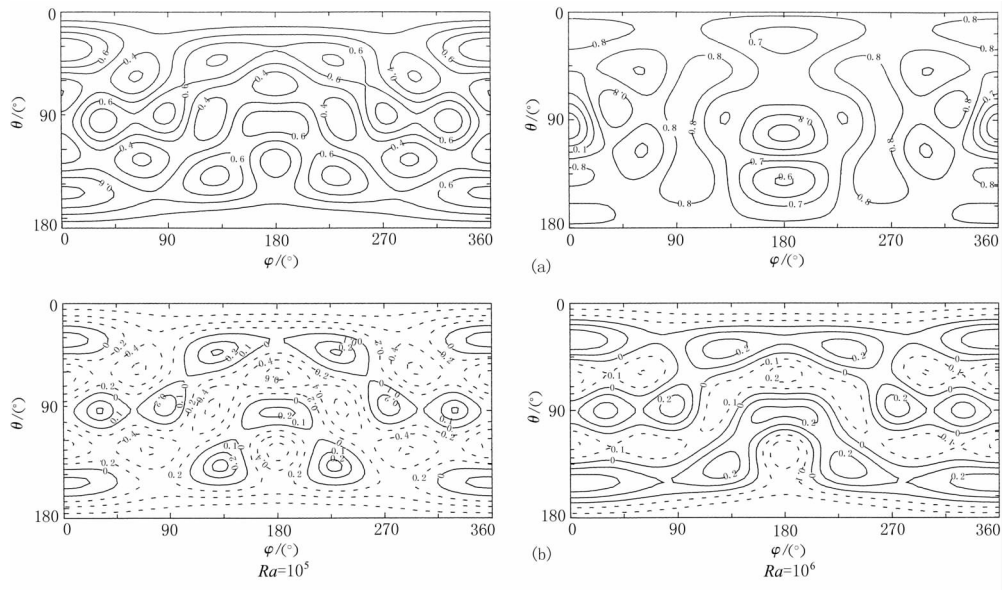


图 7 不同深度、不同瑞利数的温度扰动剖面

(a)  $r=2.04$ (深度约 660 km); (b)  $r=1.34$ (深度约 2 620 km)

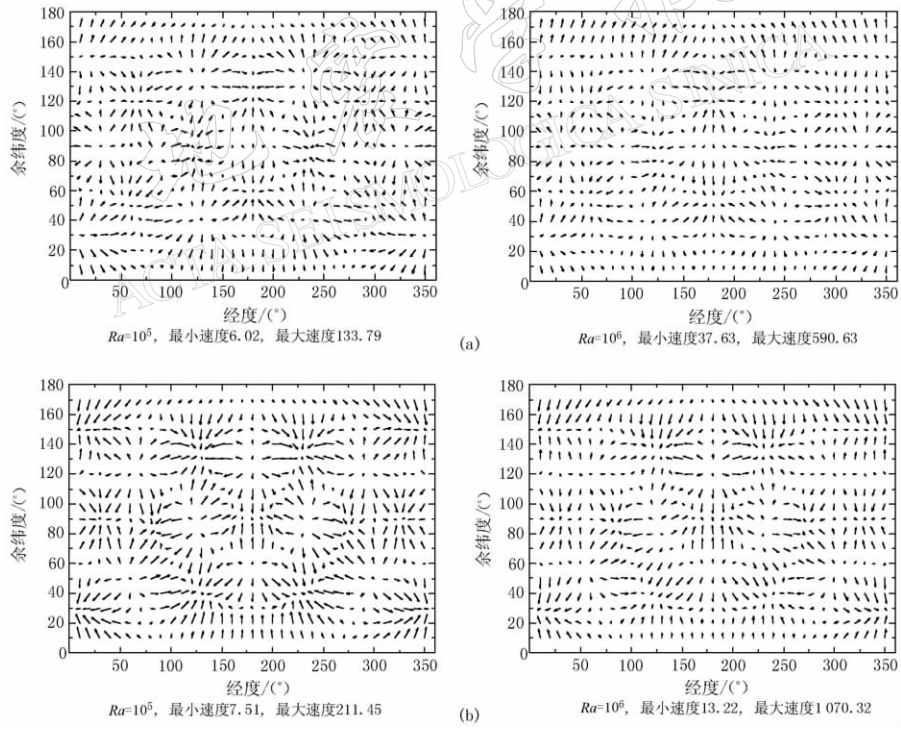


图 8 不同深度、不同瑞利数的对流剖面

(a)  $r=2.04$ (深度约为 660 km); (b)  $r=1.34$ (深度约为 2 620 km)

McGovern 等(Schubert *et al*, 2001)对地球热演化史的研究表明,在地球的早期,地幔瑞利数有着极大的初始值(约  $3.5 \times 10^{10}$ )和极低的运动粘度系数(约  $4.0 \times 10^{14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ).

随着高温气体逸出,地幔降温 and 运动粘度系数的加大,经过约 45 亿年瑞利数才随时间呈指数关系下降到目前约  $10^7$  的数量级. 按着这种瑞利数逐渐降低的发展趋势来看,本研究  $Ra=10^6$ ,  $10^5$ ,  $10^4$  和  $3 \times 10^3$  的结果似乎表达了地球演化过程中不同阶段的热对流形态及其导致的温度结构. 如果  $Ra=10^6$  的扰动温度和对流剖面分布特征,能代表今天的地球状态,那么可以推断,更早时期,地幔的对流运动会更强烈,由之引起的板块的水平运动和垂直运动幅度会更大,而且对流胞的长宽比会更大,数目会比本研究模型中的 6 个还要多,上地幔的厚度更薄. 但是,地球如果演化到地幔瑞利数  $Ra=3 \times 10^3$  的时期,此时地幔对流运动非常弱,主要以热传导传热为主,说明地球已经基本失去活力,可能进入了演化的后期,继而转到冷冰期状态.

临界瑞利数  $Ra_c$  的确定有利于认识对流胞的尺度. Schubert 等(2001)研究了 6 种不同边界模型下二维平板间的自由热对流. 得到临界瑞利数时的波长与层厚之比在  $2.016 \sim 3.57$ . 参照这一数值范围,若球谐展开  $l$  阶的波长依  $2\pi R/(l+1)$  ( $R$  为地球平均半径)来估算,则  $l=2 \sim 6$  阶的结果就主要反映了下地幔的信息,即本研究所涉及的最浅部(600~800 km)的对流图样,可能仅仅反映上地幔底部的对流状态,欲据此来解释岩石圈的构造运动显然是远远不够的.

本文模型计算中所揭示的几个现象值得在今后的研究中注意: 对流胞会由低瑞利数,如  $Ra=3 \times 10^3$  时的 4 个,在中、高瑞利数时演化为 6 个;所有的南北向( $r-\theta$ )剖面均关于赤道面对称,而所有的东西向( $r-\varphi$ )、深度( $r-\varphi$ )剖面均关于  $\varphi=180^\circ$  的子午面对称;不同位置和深度获得的剖面具有明显的差异. 东西向( $r-\varphi$ )对流剖面表明,纬度越高,对流的速率越小,即在近南、北极的区域对流速度达到最小,而在赤道附近区域达到最大. 表现出了明显的纬向差异流动. 这些差异现象可能蕴涵了重要的地球物理学含义,对认识大陆板块运动和某些全球构造起到有益的作用. 不同深度的对流剖面表明,深度越大,对流的速率越大,而且对流形态与浅部具有显著的差异. 即使在同一深度的对流剖面中,各个局部区域的对流速率也有差异. 南北向剖面在高瑞利数( $Ra=10^6$ )时,对流环的上部能达到更浅处,其上部的几乎静止的刚性板块状盖层和下部的强对流层形成了强烈的反差.

## 4 结论

本研究对球层中非线性自由热对流的常粘度模型进行了数值模拟,重点对比了不同瑞利数的影响,分析了在将速度场和扰动温度场展到 6 阶 6 级时的对流格局和温度分布. 随着展开阶数和级数的增大,不仅对流剖面中对流胞数目和温度剖面中的热柱数目有所增加,更重要的是可以得到不同的南北向、东西向和深度剖面的分布特征. 数值模拟所揭示的纬向差异流动是个十分有意义的现象,在今后的研究工作中值得注意.

感谢马宗晋院士在科学思路上的重要指导;在整个研究过程中,叶正仁和傅容珊教授一直给予了大力支持和热情帮助. 谨表诚挚谢意.

## 参 考 文 献

- 傅容珊. 1990. 地球大地水准面异常和地幔对流的物理数学模型[J]. 地球物理学报, 33(增刊 II): 457~468  
傅容珊, 常筱华, 黄建华, 等. 1994. 区域重力均衡异常和上地幔小尺度对流模型[J]. 地球物理学报, 37(增刊 II): 249

~257

- 傅容珊, 董树谦, 黄建华, 等. 2002. 地震层析成像——地幔对流新模型的研究[J]. 地球物理学报, **45**(增刊): 136~143
- 傅容珊, 黄建华, 董树谦, 等. 2003. 利用地震层析成像数据计算地幔对流新模型的探讨[J]. 地球物理学报, **46**(6): 772~778
- 傅容珊, 林芬, 黄建华. 1992. 板块绝对运动及地幔热对流[J]. 地球物理学报, **35**(1): 52~61
- 傅容珊, 黄建华. 1993. 利用多种地球物理观测资料直接反演地幔对流模型[J]. 地球物理学报, **36**(3): 297~307
- 梁昆森. 1978. 数学物理方法[M]. 北京: 人民教育出版社, 352~353
- 孙苟英, 张怀, 梁国平. 2002. 亚洲大陆下的地幔流动及其对亚洲地壳的作用力[J]. 地震学报, **24**(3): 225~230
- 王景赞, 黄建华, 傅容珊. 2000. 弹性岩石层、区域重力异常和上地幔小尺度对流[J]. 地壳形变与地震, **20**(4): 1~10
- 叶正仁, 白武明, 滕春凯. 1993. 地幔对流的数值模拟及其与表面观测的关系[J]. 地球物理学报, **36**(1): 27~36
- 叶正仁, 滕春凯, 张新武. 1995. 地幔对流与岩石圈板块的相互耦合及影响——( I )球腔中的自由热对流[J]. 地球物理学报, **38**(2): 174~180
- 叶正仁, 朱日祥. 1996. 地幔对流与岩石圈板块的相互耦合及影响——( II )地幔混合对流理论及其应用[J]. 地球物理学报, **39**(1): 47~56
- 叶正仁, 王建. 2003. 上地幔变黏度小尺度对流的数值研究[J]. 地球物理学报, **46**(3): 335~339
- 朱涛. 2003. 地幔动力学进展——地幔对流[J]. 地球物理学进展, **18**(1): 65~73
- Buckus G. 1958. A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos[J]. *Ann Phys*, **4**: 381~384
- Bercovici D, Schubert G, Glatzmaier G A. 1989. Three-dimensional spherical models of convection in the earth's mantle [J]. *Science*, **244**: 950~955
- Birger B I. 1998. Rheology of the earth and a thermoconvective mechanism for sedimentary basin formation[J]. *Geophys J Int*, **134**: 1~12
- Chase C. 1979. Subduction, the geoid, and lower mantle convection[J]. *Nature*, **282**: 464~468
- Christensen U, Harder H. 1991. 3-D convection with variable viscosity[J]. *Geophys J Int*, **104**: 213~226
- Elsasser W M. 1971. Sea floor spreading as thermal convection[J]. *J Geophys Res*, **76**: 1 101~1 112
- Forté A M, Peltier W R. 1987. Plate tectonics and aspherical earth structure: the importance of poloidal-toroidal coupling [J]. *J Geophys Res*, **92**: 3 645~3 679
- Fu R S. 1989. Plate motions, Earth's geoid anomalies and mantle convection[A]. In: Cohen S C, Vanicek P eds. *Slow Deformation and Transmission of Stress in the Earth*[C]. Washington, D C; American Geophysical Union, IUGG, 47~54
- Fu R S, Huang J H. 1992. Thermodynamical response of the mantle to a moving upper boundary[J]. *Phys Earth Planet Inter*, **71**: 112~125
- Hager B H, O'Connell R J. 1978. Subduction zone dips and flow driven by the plates[J]. *Tectonophysics*, **50**: 111~134
- Hager B H, O'Connell R J. 1979. Kinematic models of largescale mantle flow[J]. *J Geophys Res*, **84**: 1 031~1 048
- Hager B H, O'Connell R J. 1981. A simple global model of plate dynamics and mantle convection[J]. *J Geophys Res*, **86**: 4 843~4 867
- King S D. 1994. Subducted slabs and the geoid 1. Numerical experiments with temperature-dependent viscosity[J]. *J Geophys Res*, **99**(B10): 19 843~19 852
- Kogan M G, McNutt M K. 1993. Gravity field over northern Eurasia and variations in the strength of the upper mantle [J]. *Science*, **259**: 473~479
- Minster J B, Jordan T H. 1978. Present-day plate motion[J]. *J Geophys Res*, **83**: 5 331~5 354
- Ribe N M. 1992. The dynamics of thin shells with variable viscosity and the origin of toroidal flow in the mantle[J]. *Geophys J Int*, **110**: 537~552
- Richards M A, Hager B H. 1989. Effects of lateral viscosity variations on long-wavelength geoid anomalies and topography[J]. *J Geophys Res*, **94**(B8): 10 299~10 313
- Richard Y, Vigny C. 1989. Mantle dynamics with induced plate tectonics[J]. *J Geophys Res*, **94**(B12): 17 543~17 559

- Richter F M. 1973. Convection and the large-scale circulation of the mantle[J]. *J Geophys Res*, **78**(35):8 736~8 745
- Schubert G, Turcotte D L, Olson P. 2001. *Mantle Convection in the Earth and Planets*[M]. UK: Cambridge University Press, 295~296
- Schubert G, Zebib A. 1980. Thermal convection of an internally heated infinite Prandtl number fluid in a spherical shell [J]. *Geophys Astrophys Fluid Dynamics*, **15**: 65~90
- Stewart C A. 1992. Thermal convection in the earth's mantle: mode coupling induced by temperature-dependent viscosity in a three-dimensional spherical shell[J]. *Geophys Res Lett*, **19**(4): 337~340
- Zebib A F, Schubert G, Straus J M. 1980. Infinite Prandtl number thermal convection in a spherical shell[J]. *J Fluid Mech*, **97**(part 2): 257~277
- Zhong S J. 1996. Analytic solutions for Stokes' flow with lateral variations in viscosity[J]. *Geophys J Int*, **124**: 18~28
- Zhong S J, Zuber M T. 2000. Role of temperature-dependent viscosity and surface plates in spherical shell models of mantle convection[J]. *J Geophys Res*, **105**(B5): 11 063~11 082

## THE PATTERNS OF HIGH-DEGREE THERMAL FREE CONVECTION AND ITS FEATURES IN A SPHERICAL SHELL

Zhu Tao Feng Rui

(Institute of Geophysics, China Earthquake Administration, Beijing 100081, China)

**Abstract:** A high-degree (degree  $l=6$  and order  $m=0, 1, 2, \dots, l$ . High-order model for short) and steady thermal free convective motion of an infinite Prandtl number and Boussinesq fluid in a spherical shell is calculated by a Galerkin method. Convection is driven by an imposed temperature drop across top rigid and bottom stress-free isothermal boundaries only heated from below of the shell. In this paper, the scalar poloidal and fluctuating temperature fields are expanded into associated Legendre polynomials with degree  $l=6$  and order  $m=0, 1, 2, \dots, l$ . Compared with zero-order model (degree  $l=6$  and order  $m=0$ ), from which 2-D longitudinal ( $r-\theta$ ) profiles can be obtained, high-order model can provide a series of southerly ( $r-\theta$ ), easterly ( $r-\varphi$ ) and radial ( $q-\varphi$ ) velocity profiles, which probably reveal more detail features of mass motion in the mantle. It is found that Rayleigh number has great effects on the patterns and velocities of thermal free convection and controls the relative ratio of hot and cold plume in the shell. Probably, the present results mainly reveal the mass motion in the lower mantle, while the striking differences of convection patterns from velocities at different positions have important geodynamical significances.

**Key words:** nonlinear thermal free convection; constant viscosity; Galerkin method