

马宏伟, 陈文化. 2011. 两斜交柱坐标系间谐波函数坐标变换的辅助平面方法. 地震学报, 33(5): 683-690.
Ma Hongwei, Chen Wenhua. 2011. An auxiliary plane method for harmonic function transformation between two skew cylindrical coordinate systems. *Acta Seismologica Sinica*, 33(5): 683-690.

两斜交柱坐标系间谐波函数坐标 变换的辅助平面方法^{*}

马宏伟 陈文化[†]

(中国北京 100044 北京交通大学土木建筑工程学院)

摘要 针对利用波函数展开法进行三维地震响应研究中的坐标变换问题, 提出了在两斜交柱坐标系间谐波函数空间坐标变换的辅助平面方法. 通过建立与空间点对应的一系列辅助平面, 将地震波三维散射研究中的谐波函数表达式从柱坐标系变换至辅助平面内的极坐标系, 然后在辅助平面内运用 Graf 加法公式, 将柱坐标系下的波函数表达式变换至与该柱坐标系斜交的另一柱坐标系下, 从而将三维问题转换成二维问题进行处理, 最终得到了斜交柱坐标系下内域问题和外域问题的坐标变换公式.

关键词 地震波 辅助平面方法 斜交柱坐标系 Graf 加法公式

doi: 10.3969/j.issn.0253-3782.2011.05.012 中图分类号: P315.9 文献标识码: A

An auxiliary plane method for harmonic function transformation between two skew cylindrical coordinate systems

Ma Hongwei Chen Wenhua[†]

(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: Aiming at the coordinate transformation in studying a 3-D seismic response with wave function expansion method, this paper presents an auxiliary plane method for harmonic function transformation between two skew cylindrical coordinate systems. By creating a series of auxiliary plane corresponding to spatial points, the 3-D harmonic wave function is transformed from cylindrical coordinate system to planar polar coordinate. Then the wave function under a cylindrical coordinate system is transformed into another one, which is skew to the former, by using the Graf's addition formula on the auxiliary plane. Thus the 3-D problem is turned into two-dimensional. Finally, the coordinate transformation formula between two skew cylindrical coordinate systems is given.

Key words: seismic wave; auxiliary plane method; skew cylindrical coordinate systems; Graf's addition theorem

* 基金项目 国家自然科学基金项目(50678021)资助.

收稿日期 2010-09-07 收到初稿, 2011-06-09 决定采用修改稿.

† 通讯作者 e-mail: whchen@bjtu.edu.cn

引言

波函数展开法(Trifunac, 1972)是研究地震波入射时场地动力响应的一种行之有效的解析方法。在采用波函数展开法进行场地的波场分析时,通常需要将波函数的 Fourier-Bessel 级数展开形式由一个坐标系变换到另一个坐标系,以便于边界条件的代入。波函数的坐标变换问题成为采用波函数展开法进行复杂场地,尤其是复杂三维场地的波场分析的重要环节之一。

Trifunac 提出波函数展开法以来的 30 多年间,波函数展开法得到了不断的发展和完善。针对由单相介质或流体饱和多孔介质构成的天然场地,以及存在地下无衬砌孔洞或有衬砌孔洞的场地,国内外研究者对入射平面 P 波(Cao, Lee, 1990; 梁建文等, 2001; 张郁山, 2008)、入射平面 SV 波(Lee, Cao, 1989; Davis *et al*, 2001; 李伟华, 赵成刚, 2004)、入射平面 SH 波(Wong, Trifunac, 1974a, b; Todorovska, Lee, 1991; Yuan, Liao, 1995),以及入射瑞雷波(Todorovska, Lee, 1990; Lee, Karl, 1992; 梁建文, 纪晓东, 2006)等在场地中的平面内散射问题进行了研究。同时也存在一些对凹陷地形的三维地震响应研究的报道(Lee, 1982, 1984; 董俊, 赵成刚, 2005; 赵成刚, 韩铮, 2007)。在上述研究工作中,平面内地震波的散射研究通常是将平面边界简化为半径足够大的圆弧,然后在极坐标系下进行场地边界条件的代入,而三维散射研究则是将凹陷地形及自由地表简化为球面,进而在球坐标系下进行边界条件的讨论。然而对于类似于圆断面隧道下穿河谷地形、圆断面隧道交叉段等可在三维柱坐标系下建立模型的复杂场地,利用波函数展开法进行场地地震响应的研究一直未有文献报道。借助于平面内场地地震响应研究中通常采用的大圆弧替代自由地表的方法,圆断面隧道下穿河谷地形、圆断面隧道交叉段等复杂场地可以简化为两个或两个以上的柱面三维斜交的模型进行讨论。因此讨论空间斜交柱坐标系间谐波函数的坐标变换是十分必要的。

为了使谐波函数代入复杂三维柱面斜交场地的边界条件的步骤简单明晰,本文提出一种谐波函数在斜交柱坐标系间变换的辅助平面方法。通过建立一系列与空间点坐标一一对应的辅助平面,将三维坐标变换问题转移至辅助平面内进行处理,最终在辅助平面内运用 Graf 加法公式实现了波函数的三维坐标变换。

1 谐波函数的柱坐标表达形式

柱坐标系下任意关于时间和空间的波函数 $F(r, \theta, z, t)$ 的波动方程可写为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

式中, c 为介质中的波速。利用分离变量法求解可得波函数在柱坐标系下的第 n 阶分量, 可写成(梁建文等, 2009)

$$F_n(r, \theta, z, t) = e^{i(\gamma z - \omega t)} C_n(kr) (A \cos n\theta + B \sin n\theta) \quad (2)$$

式中, ω 为波的频率, $\gamma = \omega/c \cos \beta$, $k = \omega/c \sin \beta$, β 为常数, A 和 B 为由边界条件决定的系数, $C_n(*)$ 为第一类贝塞尔(Bessel)函数或第一类汉克尔(Hankel)函数。在稳态情况下,不考虑时间的相关性,略去式(2)中的时间因子 $e^{-i\omega t}$,这样地震谐波函数的第 n 阶分量在柱

坐标系(r, θ, z)中的表达形式可写成

$$F_n(r, \theta, z) = e^{iz} C_n(kr)(A \cos n\theta + B \sin n\theta) \quad (3)$$

2 辅助平面法

无限空间中柱坐标系(r_1, θ_1, z_1)与(r_2, θ_2, z_2)以及与之对应的笛卡尔坐标系(x_1, y_1, z_1)与(x_2, y_2, z_2)的关系如图1所示。两坐标原点 o_1 与 o_2 之间的距离为 h , x_1 轴和 x_2 轴位于同一竖直线上, z_1 轴与 z_2 轴之间的夹角为 φ 。

以谐波函数由柱坐标系(r_2, θ_2, z_2)到柱坐标系(r_1, θ_1, z_1)的转换为例。

2.1 坐标转换关系

图1中, 柱坐标系(r_2, θ_2, z_2)与柱坐标系(r_1, θ_1, z_1)存在如下坐标转换关系:

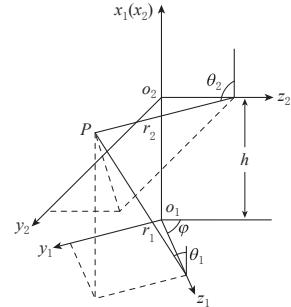


图1 坐标系关系图

Fig. 1 Relationship of coordinate systems

$$\begin{cases} r_2 \cos \theta_2 = r_1 \cos \theta_1 - h \\ r_2 \sin \theta_2 = z_1 \sin \varphi + r_1 \sin \theta_1 \cos \varphi \\ z_2 = z_1 \cos \varphi - r_1 \sin \theta_1 \sin \varphi \end{cases} \quad (4)$$

将式(4)整理后可得用 r_1, θ_1 和 z_1 表示的 r_2, θ_2 和 z_2 的表达式为

$$\begin{cases} r_2 = \sqrt{[(r_1 \cos \theta_1 - h)^2 + (z_1 \sin \varphi + r_1 \sin \theta_1 \cos \varphi)^2]} \\ \cos \theta_2 = \frac{r_1 \cos \theta_1 - h}{\sqrt{[(r_1 \cos \theta_1 - h)^2 + (z_1 \sin \varphi + r_1 \sin \theta_1 \cos \varphi)^2]}} \\ z_2 = z_1 \cos \varphi - r_1 \sin \theta_1 \sin \varphi \end{cases} \quad (5)$$

2.2 建立辅助平面及辅助坐标系

取空间任意一点 P , 点 P 在两个柱坐标系下的坐标分别为(r_1, θ_1, z_1)和(r_2, θ_2, z_2)。 P 点在 z_1 轴上的投影点为 P_1 , 在 z_2 轴上的投影点为 P_2 。若 P, P_1, P_2 三点不在同一直线上, 建立通过上述三点的辅助平面, 进行坐标转换推导。在辅助平面内, 构造三角形 PP_1P_2 。令 $\angle PP_1P_2 = \alpha_1$, $\angle PP_2P_1 = \alpha_2$, $P_1P_2 = d$ 。建立的辅助平面如图2所示。

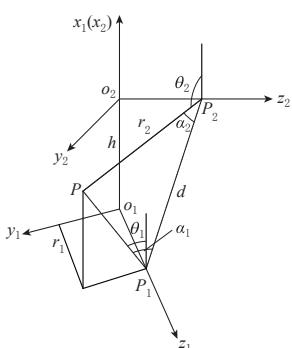


图2 辅助平面法

Fig. 2 Auxiliary plane method

由坐标系的几何关系可得

$$d = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 \cos \varphi + h^2} = \sqrt{z_1^2 + \sin^2 \varphi + r_1^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \varphi + h^2} \quad (6)$$

在三角形 PP_1P_2 中, 根据余弦定理可得

$$\begin{cases} r_1^2 = d^2 + r_2^2 - 2dr_2 \cos\alpha_2 \\ r_2^2 = d^2 + r_1^2 - 2dr_1 \cos\alpha_1 \end{cases} \quad (7)$$

将式(5)和式(6)代入式(7)整理可得：

$$\begin{cases} \cos\alpha_1 = \frac{r_1 \sin^2\theta_1 \sin^2\varphi - z_1 \sin\theta_1 \sin\varphi \cos\varphi + h \cos\theta_1}{[z_1^2 \sin^2\varphi + r_1^2 \sin^2\theta_1 \sin^2\varphi + h^2]^{1/2}} \\ \cos\alpha_2 = \frac{z_1^2 \sin^2\varphi + h^2 - hr_1 \cos\theta_1 + r_1 z_1 \sin\theta_1 \sin\varphi \cos\varphi}{[(z_1^2 \sin^2\varphi + r_1^2 \sin^2\theta_1 \sin^2\varphi + h^2)[(r_1 \cos\theta_1 - h)^2 + (z_1 \sin\varphi + r_1 \sin\theta_1 \cos\varphi)^2]]^{1/2}} \end{cases} \quad (8)$$

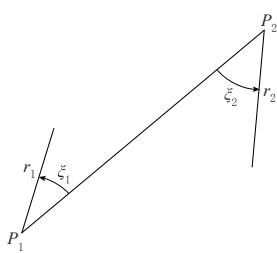


图 3 辅助极坐标系

Fig. 3 Auxiliary polar coordinate systems

在辅助平面内，以 P_1 为极点， P_1P_2 为极轴建立极坐标系 (r_1, ξ_1) ，以 P_2 为极点， P_2P_1 为极轴建立极坐标系 (r_2, ξ_2) ，且 ξ_1, ξ_2 从各自的极轴开始同方向旋转。建立的辅助极坐标系如图 3 所示。

三角形 PP_1P_2 内， α_1 和 α_2 位于 P_1P_2 的一侧，因此当在辅助极坐标系 (r_1, ξ_1) 和 (r_2, ξ_2) 内描述时，无论点 P 位于无限空间的何位置，且无论 ξ_1 和 ξ_2 从极轴开始顺时针旋转为正还是逆时针旋转为正， α_1 和 α_2 总是异号。为便于推导，文中规定 α_1 取正值， α_2 取负值，这对推导结果不造成影响。

2.3 波函数的变换

取谐波函数的 Fourier-Bessel 级数展开式的余弦项进行推导，谐波函数在柱坐标系 (r_2, θ_2, z_2) 下的 Fourier-Bessel 级数展开式中第 n 阶分量的余弦项为

$$e^{iz_2} C_n(kr_2) \cos n\theta_2 \quad (9)$$

2.3.1 从柱坐标系 (r_2, θ_2, z_2) 到极坐标系 (r_2, ξ_2) 的转换

借助于三角函数的倍角公式，令

$$RC_2 = \frac{\cos n\theta_2}{\cos(-n\alpha_2)} = \frac{\sum_{p=0}^n \cos(p \cdot \pi/2) C_n^p \cos^{n-p} \theta_2 \sin^p \theta_2}{\sum_{q=0}^n (-1)^q \cos(q \cdot \pi/2) C_n^q \cos^{n-q} \alpha_2 \sin^q \alpha_2} \quad (10)$$

将式(5)和式(8)代入式(10)即可得到 RC_2 的具体表达式。从而得到

$$e^{iz_2} C_n(kr_2) \cos n\theta_2 = e^{i\gamma(z_1 \cos\varphi - r_1 \sin\theta_1 \sin\varphi)} RC_2 \cdot C_n(kr_2) \cos n\alpha_2 \quad (11)$$

2.3.2 从极坐标系 (r_2, ξ_2) 到极坐标系 (r_1, ξ_1) 的转换

极坐标系 (r_1, ξ_1) 和 (r_2, ξ_2) 均位于辅助平面 PP_1P_2 内，因此波函数从极坐标系 (r_2, ξ_2) 到极坐标系 (r_1, ξ_1) 的转换可直接使用 Graf 加法公式(Graf's addition theorem)。Graf 加法公式的表达式(Abramowitz, Stegun, 1970)为

$$C_n(w) \overset{\cos n\chi}{\underset{\sin}{\sim}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{n+m}(u) J_m(\nu) \overset{\cos m\alpha}{\underset{\sin}{\sim}} m\alpha \quad (|\nu e^{\pm ia}| < |u|) \quad (12)$$

w, χ, u, ν, α 的关系如图 4 所示。当 $C_n(*)$ 为 $J_n(*)$ (第一类贝塞尔函数) 时式(12)

恒成立；当 $C_n(*)$ 为 $H_n^{(1)}(*)$ （第一类汉克尔函数）时，在 $\nu < u$ 时式(12)成立。即：对于内域问题，式(12)可用于 $C_n(*)$ 为 $J_n(*)$ 或 $H_n^{(1)}(*)$ 的情况；对于外域问题，式(12)只适用于 $C_n(*)$ 为 $H_n^{(1)}(*)$ 的情况。

辅助平面内的三角形 PP_1P_2 中各量的关系如图 5 所示。

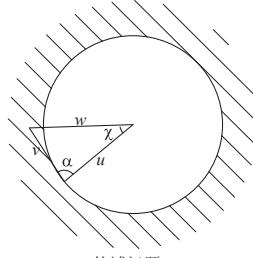
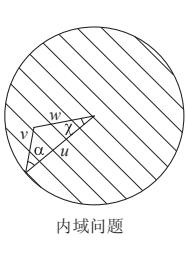


图 4 Graf 加法公式基本形式
Fig. 4 Graf's addition theorem

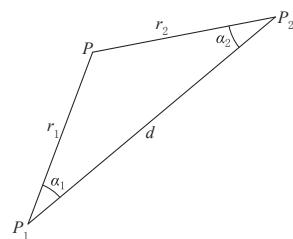


图 5 辅助平面内的 Graf 加法公式基本形式
Fig. 5 Graf's addition theorem in auxiliary plane

将波函数从极坐标系 (r_2, ξ_2) 转换到极坐标系 (r_1, ξ_1) 时，利用相似三角形的性质，将图 5 所示三角形 PP_1P_2 的三边同乘以波数 k ，三角形内角保持不变。比较图 5 和图 4 可见，Graf 加法公式中的各项的对应关系可写为： $w = kr_2$, $\chi = \alpha_2$, $u = kd$, $\nu = kr_1$, $\alpha = \alpha_1$ 。代入式(12)可得

$$C_n(kr_1) \frac{\cos n\alpha_2}{\sin n\alpha_2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{n+m}(kd) J_m(kr_1) \frac{\cos m\alpha_1}{\sin m\alpha_1} \quad (13)$$

利用 Bessel 函数的自递推关系 $C_{-n}(u) = (-1)^n C_n(u)$ ，式(13)可整理为

$$C_n(kr_2) \frac{\cos n\alpha_2}{\sin n\alpha_2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{2} J_m(kr_1) [C_{n+m}(kd) \pm (-1)^m C_{n-m}(kd)] \frac{\cos m\alpha_1}{\sin m\alpha_1} \quad (14)$$

式中， $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_m = 2 (m = 1, 2, 3, \dots)$ 。

令

$$F_{mn}^{\pm} = \frac{\epsilon_m}{2} J_m(kr_1) [C_{n+m}(kd) \pm (-1)^m C_{n-m}(kd)] \quad (15)$$

于是

$$e^{i\gamma z_2} C_n(kr_2) \cos n\theta_2 = e^{i\gamma(z_1 \cos \varphi - r_1 \sin \theta_1 \sin \varphi)} R C_2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} F_{mn}^{\pm} \cos m\alpha_1 \quad (16)$$

2.3.3 从极坐标系 (r_1, ξ_1) 到柱坐标系 (r_1, θ_1, z_1) 的转换

谐波函数从极坐标系 (r_1, ξ_1) 到柱坐标系 (r_1, θ_1, z_1) 的转换类似于 2.3.1 节的讨论。

利用倍角公式，令

$$R C_1 = \frac{\cos m\alpha_1}{\cos m\theta_1} = \frac{\sum_{s=0}^m \cos(s \cdot \pi/2) C_m^s \cos^{m-s} \alpha_1 \sin^s \alpha_1}{\sum_{t=0}^m \cos(t \cdot \pi/2) C_m^t \cos^{m-t} \theta_1 \sin^t \theta_1} \quad (17)$$

将式(5)和式(8)代入式(17), 即可得到 RC_1 的具体表达式. 于是

$$e^{iz_2} C_n(kr_2) \cos n\theta_2 = e^{i(z_1 \cos \varphi - r_1 \sin \theta_1 \sin \varphi)} RC_2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} F_{nm}^+ \cdot RC_1 \cdot \cos m\theta_1 \quad (18)$$

这样, 便将波函数的余弦项由柱坐标系(r_2, θ_2, z_2)转换到柱坐标系(r_1, θ_1, z_1)下. 采用同样的方法, 亦可将波函数的正弦项由柱坐标系(r_2, θ_2, z_2)转换到柱坐标系(r_1, θ_1, z_1)下, 此处不再赘述.

3 谐波函数在空间斜交柱坐标系间的变换公式

根据以上推导, 谐波函数在空间斜交柱坐标系间的变换公式为

$$\begin{cases} e^{iz_2} C_n(kr_2) \cos n\theta_2 = e^{ia(z_1 \cos \varphi - r_1 \sin \theta_1 \sin \varphi)} RC_2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} F_{nm}^+ \cdot RC_1 \cdot \cos m\theta_1 \\ e^{iz_2} C_n(kr_2) \sin n\theta_2 = e^{ia(z_1 \cos \varphi - r_1 \sin \theta_1 \sin \varphi)} RS_2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} F_{nm}^- \cdot RS_1 \cdot \sin m\theta_1 \end{cases} \quad (19)$$

式中

$$RS_1 = \frac{\sum_{s=0}^m \sin(s \cdot \pi/2) C_m^s \cos^{m-s} \alpha_1 \sin^s \varphi}{\sum_{t=0}^m \sin(t \cdot \pi/2) C_m^t \cos^{m-t} \theta_1 \sin^t \theta_1}, \quad RS_2 = \frac{\sum_{p=0}^n \sin(p \cdot \pi/2) C_n^p \cos^{n-p} \theta_2 \sin^p \theta_2}{\sum_{q=0}^n (-1)^q \sin(q \cdot \pi/2) C_n^q \cos^{n-q} \alpha_2 \sin^q \alpha_2}$$

特别的, 对于下面 3 类特殊情况:

1) 空间轴向垂直的柱坐标系间的变换, 即 $\varphi=\pi/2$, 此时

$$RC_1 = \frac{\sum_{s=0}^m \cos(s \cdot \pi/2) C_m^s (r_1 \sin^2 \theta_1 + h \cos \theta_1)^{m-s} [z_1^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1 + h^2 - (r_1 \sin^2 \theta_1 + h \cos \theta_1)^2]^{s/2}}{(z_1^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1 + h^2)^{m/2} \sum_{t=0}^m \cos(t \cdot \pi/2) C_m^t \cos^{m-t} \theta_1 \sin^t \theta_1}$$

$$RS_1 = \frac{\sum_{s=0}^m \sin(s \cdot \pi/2) C_m^s (r_1 \sin^2 \theta_1 + h \cos \theta_1)^{m-s} [z_1^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1 + h^2 - (r_1 \sin^2 \theta_1 + h \cos \theta_1)^2]^{s/2}}{(z_1^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1 + h^2)^{m/2} \sum_{t=0}^m \sin(t \cdot \pi/2) C_m^t \cos^{m-t} \theta_1 \sin^t \theta_1}$$

$$RC_2 = \frac{\sum_{p=0}^n \cos(p \cdot \pi/2) C_n^p (r_1 \cos \theta_1 - h)^{n-p} z_1^p}{\sum_{q=0}^n (-1)^q \cos(q \cdot \pi/2) C_n^q (z_1^2 + h^2 - h r_1 \cos \theta_1)^{n-q} r_1^q [(r_1 \cos \theta_1 - h)^2 \sin^2 \theta_1 + z_1^2]^{q/2}}$$

$$RS_2 = \frac{\sum_{p=0}^n \sin(p \cdot \pi/2) C_n^p (r_1 \cos \theta_1 - h)^{n-p} z_1^p}{\sum_{q=0}^n (-1)^q \sin(q \cdot \pi/2) C_n^q (z_1^2 + h^2 - h r_1 \cos \theta_1)^{n-q} r_1^q [(r_1 \cos \theta_1 - h)^2 \sin^2 \theta_1 + z_1^2]^{q/2}}$$

2) 空间轴向平行的柱坐标系间的变换, 即 $\varphi=0$, 这是 P, P_1 和 P_2 三点共线的一种情

况。此时三维问题转换为平面问题, $RC_2 = RS_2 = (-1)^n$, $RC_1 = RS_1 = 1$. 这与梁建文等(2009)所推导的结论相符。

3) P , P_1 和 P_2 三点共线的另一种情况, 即 P 点位于 x 轴上。此时 θ_1 , θ_2 , α_1 和 α_2 的正弦值均为 0, RC_1 、 RS_1 、 RC_2 和 RS_2 均为 0/0 的形式。为了使 P 点位于 x 轴上时坐标变换式亦成立, 只需令 RC_1 、 RS_1 、 RC_2 和 RS_2 均为 1 即可。

4 结论

通过建立与空间点相对应的辅助平面, 将三维坐标变换问题转变为二维问题进行处理。在辅助平面内借助于 Graf 加法公式, 使得谐波函数在斜交柱坐标系间的变换得以实现, 最终得到了地震谐波函数在斜交柱坐标系间的坐标变换公式。对于其它的空间斜交柱坐标系, 可采用该式的适当变形形式进行谐波函数的坐标变换。

参 考 文 献

- 董俊, 赵成刚. 2005. 半球形凹陷饱和土半空间对入射平面 SV 波三维散射问题的解析解[J]. 地球物理学报, 48(6): 1412–1421.
- 李伟华, 赵成刚. 2004. 饱和土沉积谷场地对平面 SV 波的散射问题的解析解[J]. 地球物理学报, 47(5): 911–919.
- 梁建文, 纪晓东. 2006. 地下衬砌洞室对 Rayleigh 波的放大作用[J]. 地震工程与工程振动, 26(4): 24–31.
- 梁建文, 魏新磊, Lee V W. 2009. 圆弧形沉积谷地对 Rayleigh 波三维散射解析解[J]. 天津大学学报, 42(1): 24–34.
- 梁建文, 严林隽, Lee V W. 2001. 圆弧形层状沉积河谷地对入射平面 P 波的散射解析解[J]. 地震学报, 23(2): 167–184.
- 张郁山. 2008. 圆弧状多层沉积谷地在平面 P 波入射下稳态响应的解析解[J]. 地球物理学报, 51(3): 869–880.
- 赵成刚, 韩铮. 2007. 半球形饱和沉积谷场地对入射平面 Rayleigh 波的三维散射问题的解析解[J]. 地球物理学报, 50(3): 905–914.
- Abramowitz M, Stegun I A. 1970. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*[M]. 9th ed. New York: Dover Publication: 355–389.
- Cao H, Lee V W. 1990. Scattering and diffraction of plane P waves by circular-cylindrical canyons with variable depth-to-width ratio[J]. *Soil Dyn Earthquake Eng*, 9(3): 141–150.
- Davis C A, Lee V W, Bardet J P. 2001. Transverse response of underground cavities and pipes to incident SV waves[J]. *Earthquake Eng Struct Dyn*, 30(3): 383–410.
- Lee V W. 1982. A note on the scattering of elastic plane waves by a hemispherical canyon[J]. *Soil Dyn Earthquake Eng*, 1(3): 122–129.
- Lee V W. 1984. Three-dimensional diffraction of plane P, SV and SH waves by a hemispherical alluvial valley[J]. *Soil Dyn Earthquake Eng*, 3(3): 133–144.
- Lee V W, Cao H. 1989. Diffraction of SV waves by circular canyons of various depths[J]. *J Engrg Mech*, 115(9): 2035–2056.
- Lee V W, Karl J. 1992. Diffraction of SV waves by underground, circular, cylindrical cavities[J]. *Soil Dyn Earthquake Eng*, 11(8): 445–456.
- Todorovska M I, Lee V W. 1990. A note on response of shallow circular valleys to Rayleigh waves: analytical approach[J]. *Earthquake Eng and Eng Vibration*, 10(1): 21–34.
- Todorovska M I, Lee V W. 1991. Surface motion of shallow circular alluvial valleys for incident plane SH waves: analytical solution[J]. *Soil Dyn Earthquake Eng*, 10(4): 192–200.
- Trifunac M D. 1972. Scattering of plane SH wave by a semi-cylindrical canyon[J]. *Earthquake Eng Struct Dyn*, 1(3): 267–281.
- Wong H L, Trifunac M D. 1974a. Scattering of plane SH-wave by a semi-elliptical canyon[J]. *Soil Dyn Earthquake Eng*, 1(1): 1–12.

- Eng, 9(3): 157-169.
- Wong H L, Trifunac M D. 1974b. Surface motion of semi-elliptical alluvial valley for incident plane SH waves[J]. *Bull Seism Soc Amer*, 64(1): 1389-1408.
- Yuan X M, Liao Z P. 1995. Scattering of plane SH wave by a cylindrical alluvial valley of circular-arc cross-section[J]. *Earthq Eng Struct Dyn*, 24(1): 1303-1313.

地 震 学 报
ACTA SEISMOLOGICA SINICA