

# 断层岩石的粘弹性模型及 其在地震研究中的应用

张黎明 陶振宇

(中国武汉 430072 武汉水利电力学院)

## 摘要

根据地壳岩石所具有的流变特性以及地震发生的一些特点,本文提出了一个模拟断层岩石的流变模型,并对其在地震机制研究中应用的可能性进行了探讨。结果表明,用该模型对断层岩石的物理理想化是较合理的,并能推广至平面问题的数值模拟计算中。

**关键词** 粘滑; 应力恢复; 常应变率; 粘弹性

## 一、引言

人们通过对岩石变形的长期观察发现,岩石是具有流变特性的,即在外力的作用下,岩石内部的应力和应变是随时间而不断变化的。本世纪以来的研究表明,这种随时间而变化的特性不是杂乱无章的,而是有其内在的规律性,并可借助于一些经验的或理论的数学模型得到较好的模拟。目前,尽管由这些理想化的数学模型所模拟的流变性态与实际情况还存在一定的差别,但由于根据这些简单的流变模型所推导得到的一维解,可以根据具体条件推广至考虑时间因素的三维问题,因此,这种对岩石流变性质的简单的物理和数学理想化是很有其发展前途的,它对解决实际问题具有非常重要的作用。

另一方面,自从 Reid (1910) 在研究 1906 年旧金山大地震的基础上提出弹性回跳理论以来,断层的形成与再活动引起地震的观点已被广泛地承认和接受,并且在此研究方面获得了大量的成果。根据前人的研究成果,并从力学角度来看,大多数浅源地震(震源深度  $h \leq 70\text{km}$ )发生的直接原因是由于断层岩石的突然失稳,使得长期积累在原生断层周围岩石中的弹性应变能突然释放,并且由于岩石所具有的不可逆的力学性质,在主震发生后,断层面的某些部位将产生应力恢复和集中。由于地壳岩石所具有的流变特性和摩擦特性,这种应力恢复和集中相对于主震的发生有时间的滞后性,且往往产生再一次的断层岩石的失稳,引起余震,这个过程的不断往复,就形成一次地震的余震序列。

在 70 年代, Brace *et al.*, (1966, 1972) 在岩石试件上所作的粘滑试验作为浅源地震的发生机制的理论,进一步完善了地震发生的断层成因学说,为地震机制研究与断层岩石的

1989 年 12 月 16 日收到本文初稿, 1991 年 1 月 22 日决定采用。

力学特性的研究相结合开辟了新路。不过，他们的理论一直局限于对地震发生机制的定性描述。

为了达到定量分析的目的，本文从考虑断层岩石的粘弹塑性着手，提出了一个能较好地模拟岩石粘滑特性的数学模型，并探讨了在此模型基础上发展起来的数值计算方法在地震机制研究中的应用。

## 二、流变模型

天然岩石是具有弹性、塑性和粘性的多裂隙不连续介质。根据构造地震的孕育和发生机制的认识，一次强震及其余震序列的发生，是断层及其周围岩石从应变能的积累到突

然释放和应力恢复这样一个过程的重复。在这个过程中，岩石充分体现了粘弹塑性的力学特性。为了考虑这种力学特性，并达到定量分析断层构造的活动引起地震的机制，我们提出了如图 1 所示的流变失稳综合模型。

流变模型由三部分组成：第 I 部分为弹簧  $E_1$  和一开尔文(Kelvin)体串联而成，它主要表现为有弹性后效的粘弹性变形特性；第 II 部分为一粘滞元件和摩擦元件并联而成，其变形条件是  $\sigma > \sigma_f$ ，此时表现为粘塑性的变形特性；第 III 部分含一摩擦元件，我们用它来模拟模型在  $\sigma > f$  时的突然滑动现象。取不同的  $\sigma_f, f$  值，图 1 模型将显示出不同的力学性质。

### 1. 模型的应力应变关系

(1) 当  $\sigma < \sigma_f < f$  时，模型的应力应变关系可用下式(即模型的流变方程)表示：

$$\frac{K_1}{E_1} \dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{E_1} \sigma = K_1 \dot{\varepsilon} + E_2 \varepsilon \quad (1)$$

式中： $\dot{\sigma}, \dot{\varepsilon}$  分别表示应力、应变对时间的一阶微分； $E_1, E_2$  为弹簧的弹性模量； $K_1, K_2$  为粘滞元件的粘滞系数； $\sigma_f, f$  为反映模型长期强度和摩擦强度。

当考虑应力不变时，即  $\sigma = \sigma_0 = \text{常数}$ ，并设初始条件为

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0 / E_1 \quad (t=0^+ \text{ 时})$$

则流变方程式(1)的解为

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 / E_1 + (\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1}) e^{-t/t_{\alpha}} \quad (2)$$

式中： $t_{\alpha} = K_1 / E_2$  称为延滞时间； $E = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$ 。式(2)表明，在应力不变，且初始应变为  $\varepsilon_0$  的情况下，应变随时间的增加而增加。当  $t \rightarrow \infty$  时， $\varepsilon(t) \rightarrow \sigma_0 / E$  (如图 2a)。

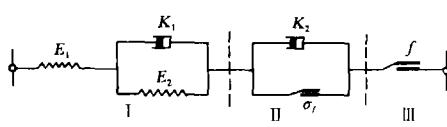


图 1 流变模型

如果考虑应变不变,即  $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{常数}$ ,则由式(1)可求得应力随时间的变化为

$$\sigma(t) = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon_0 + \frac{E_1^2 \varepsilon_0}{E_1 + E_2} e^{-t/\tau_{\text{rel}}} \quad (3)$$

式中:  $t_{\text{rel}} = K_1 / (E_1 + E_2)$  称为松弛时间, 应力的松弛规律如图 2b 所示.

(2) 当  $\sigma_f < \sigma < f$  时, 模型的流变方程为

$$\sigma + a_1 \dot{\sigma} + a_2 \ddot{\sigma} = \sigma_f + b_1 \dot{\varepsilon} + b_2 \ddot{\varepsilon} + b_0 \sigma, \quad (\delta(t) \geq 0) \quad (4)$$

式中

$$a_1 = \frac{K_2}{E_1} + \frac{K_1 + K_2}{E_2} \quad a_2 = \frac{K_1 K_2}{E_1 E_2} \quad b_n = \frac{K_1}{E_2}$$

$$b_1 = K_2 \quad b_2 = \frac{K_1 K_2}{E_2}$$

$\delta(t)$  为狄拉克(Dirac)函数, 它满足

$$\delta(t) \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases} \quad (5)$$

考慮蠕變情況，即  $t \geq 0$  時， $\sigma = \sigma_0 =$   
常數  $> \sigma_1$ 。從式(4)得蠕變方程

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{E_2} (1 - e^{-\frac{E_2}{K_1} t}) + \frac{\sigma_0 - \sigma_f}{K_2} t \quad (6)$$

考慮松弛情況，即  $t \geq 0$  時， $\varepsilon = \varepsilon_0 =$

常数,同时初始模型应力  $\sigma_0 > \sigma_f$ ,可得松弛方程为

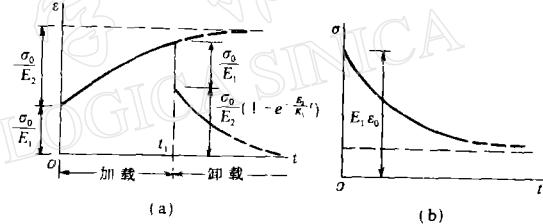


图2 流变模型的蠕变曲线与松弛曲线

武中

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & E_{\mathcal{E}_0} \left\{ \frac{1}{D_2 - D_1} \left[ \left( \frac{E_2}{K_1} - D_1 \right) e^{-D_1 t} - \left( \frac{E_2}{K_1} - D_2 \right) e^{-D_2 t} \right] \right\} + \\ & + \frac{E_1 \sigma_I}{K_2} \left( \frac{K_2}{E_1} + \frac{E_2/K_1 - D_1}{D_1(D_1 - D_2)} e^{-D_1 t} + \frac{E_2/K_1 - D_2}{D_2(D_2 - D_1)} e^{-D_2 t} \right) \quad (7) \end{aligned}$$

而其中

(3) 当  $\sigma > f$  时, 模型的第Ⅲ部分突然发生滑动, 此阶段在后面所讨论的常应变率条件下有特殊的意义.

## 2. 常应变率条件下的模型特性

设  $t < 0$  时, 作用在模型上的应力为零, 相应的应变也为零. 在  $t > 0$  后, 开始对模型施加荷载, 并保持  $\dot{\epsilon} = \xi_0$  的恒应变率变形. 为了满足此条件, 模型内应力从零逐渐增加. 当  $\sigma \leq \sigma_f$  时, 应力的增加可由式(8)表示:

$$\sigma = \left[ \frac{E_1^2 K_1}{(E_1 + E_2)^2} \left( 1 - e^{-\frac{E_1 + E_2}{K_1} t} \right) + \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} t \right] \xi_0 \quad (8)$$

上式相当于图 3 中的曲线  $OAB$ . 由式(8)可知, 当  $t$  达到一定值后,  $e^{-\frac{E_1 + E_2}{K_1} t} < 1$ , 此时, 应力与时间关系近似地为直线(图 3 中  $AB$  段). 应变率较小( $\xi_0 < 5 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ ) 的常应变率试验能得到图 3 所示的曲线, 所以, 在  $\sigma \leq \sigma_f$  阶段( $OAB$  段), 可以根据试验曲线来确定式(8)中的参数  $E_1, E_2, K_1$ .

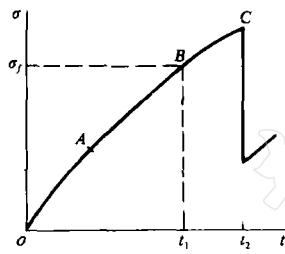


图 3 常应变率条件下模型内应力的变化规律

当  $t = t_1$  时, 模型内应力  $\sigma = \sigma_f$ , 模型的第Ⅱ部分开始工作, 此时模型显示出粘塑性流动特性, 即在应力增加较小的情况下, 模型还保持以先前的应变率  $\xi_0$  变形. 在地震现象中, 此阶段相当于断层的稳定滑动(蠕滑). 此时的应力变化规律如下:

$$\begin{aligned} \sigma = & \sigma_f + K_2 \xi_0 + \left( \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \xi_0 + \frac{E_1}{K_2} \sigma_f - \right. \\ & \left. - \frac{E_1 E_2}{K_1 \alpha} \xi_0 \right) \frac{e^{-\alpha(t-t_1)}}{\beta - \alpha} - \left( \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \xi_0 + \right. \\ & \left. + \frac{E_1}{K_2} \sigma_f - \frac{E_1 E_2}{K_1 \beta} \xi_0 \right) \frac{e^{-\beta(t-t_1)}}{\beta - \alpha} \end{aligned} \quad (9)$$

式中  $\alpha = \frac{1}{2a_2} (a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2})$        $\beta = \frac{1}{2a_2} (a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2})$        $a_1, a_2$  同式(4).

由于一般的常应变率试验常在一天以内完成, 即  $t < t_{\text{max}} = K_1/E_2$ , 材料的流变特性不能得到充分的体现. 图 3 中的初始下弯段曲线也往往成为直线, 这相当于模型第Ⅰ部分中  $E_2, K_1$  为刚性, 而只有弹簧  $E_1$  起变形作用. 这样, 式(9)可简化为

$$\sigma = \sigma_f + K_2 \xi_0 \left( 1 - e^{-\frac{E_1}{K_1}(t-t_1)} \right) \quad (10)$$

式(9)、(10)相当于图 3 中的曲线段  $BC$ .

当  $t = t_2$  时,  $\sigma = f$ , 模型内应力达到其长期强度, 第Ⅲ部分突然发生错动(相当于地震的发生), 弹簧  $E_1$  所积累的大部分弹性应变能在错动的瞬间得到释放, 而弹簧  $E_2$  中的弹性应变能, 由于粘滞元件  $K_1$  的作用, 只有缓慢地转化为  $E_1$  的弹性应变能而得到释放. 应变能的释放, 使得模型内应力水平降低, 整个系统达到错动后的平衡状态. 设此时模型应力水平为  $\sigma = f'(f' < f)$ ,  $f'$  为错动后第Ⅲ部分的摩擦强度. 错动后, 摩擦强度  $f'$  逐渐得

到恢复。因为对于实际岩石来说,  $f$  值是随错动面静止接触的时间间隔的延长而增大的 (Dieterich, 1972a, 1972b)。重复前面的过程, 将得到与曲线  $OABC$  相似的曲线。

前面所描述的模型在常应变速率下的特性与 Brace 和 Byerlee (1966), 以及 Brace (1972) 提出的粘滑机制很一致, 且用式(8)、(9)、(10)能很好地模拟他们的试验曲线(如图 4)。

当  $\varepsilon \leq 2.16\%$  (相当于  $t = 9000\text{s}$ ) 时,

$$\sigma = 2.5 \times 10^4 \zeta_0 t \quad (\text{MPa}) \quad (11)$$

当  $\varepsilon > 2.16\%$  (相当于  $t > 9000\text{s}$ ) 时,

$$\begin{aligned} \sigma = 520 + 1.5 \times 10^8 \zeta_0 \times \\ \times (1 - e^{-\frac{2.5 \times 10^4}{1.5 \times 10^8}(t-9000)}) \quad (\text{MPa}) \end{aligned} \quad (12)$$

这相当于  $E_1 = 2.5 \times 10^4 \text{ MPa}$ ,  $K_2 = 1.5 \times 10^8 \text{ MPa}\cdot\text{s}$ ,  $\sigma_f = 520 \text{ MPa}$ ,  $f = 820 \text{ MPa}$ 。

当时, Brace 等只对粘滑作为地震的发生机制作了许多定性描述, 而且还存在许多疑虑。图 1 模型不仅能较好地描述地震的发生机制, 而且能用推广的数值计算方法对地震过程进行模拟。

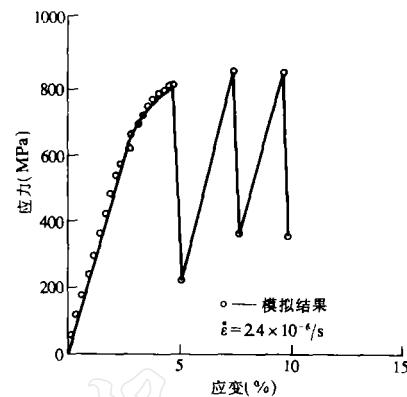


图 4 常应变速率试验条件下应力应变关系曲线及其模拟结果

### 三、模型在地震模拟计算中的应用

首先, 我们采用准静态的方法, 即将临震时的平衡状态看作是一种非稳定的平衡状态, 在外界因素的扰动下, 准静态地过渡到另一个稳定的平衡状态(震后静止状态), 这样处理的结果使得我们能用普通的有限元方法来分析、模拟地震发生的过程。

为了建立与前文提出的模型有关的有限元分析程序, 我们作以下一些处理:

设单元体的偏应变蠕变变化服从以下方程:

$$e_{ij} = \frac{1}{E_2} (1 - e^{-\frac{E_1}{K_1} t}) S_{ij} \quad (13)$$

而体积应变的蠕变变化服从方程

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu}\right) \frac{1}{E_2} (1 - e^{-\frac{E_1}{K_1} t}) \sigma_{ij} \quad (14)$$

根据粘弹性对应性原理, 由弹性有限元的物理方程

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{D}]^{-1} \{\sigma\} \quad (15)$$

可得  $t$  时刻的用矩阵表示的蠕变应变解为

$$\{\varepsilon\} = F(t) [\mathbf{A}] \{\sigma\} \quad (16)$$

上列诸式中

$$[\mathbf{D}]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F(t) = \frac{1}{E_2} (1 - e^{-\frac{E_1}{K_1} t}) \quad v \text{ 为泊松比}$$

我们进行的是平面应变有限元分析,计算时取地壳一定深度以下的某一平面,设地震的发生是由于该平面内断层单元的破裂(或滑动)而引起的.在计算时,将所要模拟的时间间隔划分成  $n$  个时段.设在各时段内,由前一时段求得的应力场保持不变,根据蠕变方程可求得时段内在该应力场作用下的蠕变应变,并将其作为初应变,利用初应变法求出时段末时刻的新的应力分布,并将其作为下一时段的初始应力场.设由各时段求得的弹性应变(相当于模型中  $E_1$  的变形)与蠕变应变(分一次蠕变和二次蠕变,它们分别相当于模型中第 I 部分  $E_2$  或  $K_1$  和第 II 部分的变形).计算中各单元的流变状态的判据为

$$F = \sqrt{3J_2} - \sigma_f \quad (17)$$

当  $\sqrt{3J_2} \leq \sigma_f$  时,各单元的蠕变应变增量为

$$\{\Delta\varepsilon\}_i = \{\Delta\varepsilon_i\}_i = (e^{-\frac{E_1}{K_1} \Delta t_i} - 1) \{\varepsilon_i\}_{i-1} + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-\frac{E_1}{K_1} \Delta t_i}) \cdot [A] \{\sigma\}_{i-1} \quad (18)$$

当  $\sqrt{3J_2} > \sigma_f$  时,产生二次蠕变,其增量表示为

$$\{\Delta\varepsilon\}_i = \{\Delta\varepsilon_{\text{I}}\}_i + \{\Delta\varepsilon_{\text{II}}\}_i = \{\Delta\varepsilon_i\}_i + \frac{\sqrt{3J_2} - \sigma_f}{\sqrt{3J_2} K_2} \Delta t_i [C] \{\sigma\}_{i-1} \quad (19)$$

以上诸式中,

$$J_2 = \frac{1}{b} ((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$$

$\sigma_f$  为单轴压缩流变的长期强度,可由流变试验得到;  $\{\Delta\varepsilon_{\text{I}}\}_i$ ,  $\{\Delta\varepsilon_{\text{II}}\}_i$  分别为  $i$  时段一次、二次蠕变应变增量.

$$[C] = \begin{bmatrix} 1-v+v^2 & -\frac{1}{2} -v(1-v) & 0 \\ -\frac{1}{2} -v(1-v) & 1-v+v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

在各计算时段内,使用其初始应力来判断计算平面内断层单元的破裂情况,其判据为常见的 Ductile-Prager 准则.断层单元的破裂(相当于模型第 III 部分的突然滑动),即认为发生了地震.逐时段完成整个时间过程的计算,就可计算出各时段的应力、应变状态以及完成地震序列的模拟过程.

作为实例,我们选择了 1976 年 7 月 28 日唐山地震为例 (Tao and Zhang, 1989),因为它具备较详细的资料.我们曾用根据前面的模型所建立的有限元分析程序模拟了同时发生于 7 月 28 日的三次地震.模拟计算所取的参数及结果分别如表 1、表 2 及图 5 所示.图 5 表明了主震发生时震源区地表的位移矢量图,从图中可知.模拟计算的结果与实测结果总体上是较一致的.

表 1 中  $C_1, C_2$  为岩石的凝聚力;  $\varphi_1, \varphi_2$  为内摩擦角;  $\sigma_f$  为抗拉强度.

表1 模拟计算中所取的各力学参数

编号	岩石分区	$E_1 \times 10^4$ (MPa)	$E_2 \times 10^4$ (MPa)	$K_1 \times 10^{15}$ (Pa·s)	$K_2 \times 10^6$ (Pa·s)	$\nu$	$C_1$ (MPa)	$C_2$ (MPa)	$\varphi_1$ (°)	$\varphi_2$ (°)	$\sigma_r$ (MPa)	$\sigma_i$ (MPa)
1	菱形块体内	8.0	7.0	50	10	0.25						
2	菱形块体外	10.0	7.0	50	10	0.25						
3	断层 $F_1$	4.0	7.0	7	1	0.26	30	20	35	30	10	
4	$F_2$	4.0	7.0	7	1	0.26	30	20	35	30	10	
5	$F_3$	5.0	7.0	7	1	0.26	30	20	35	30	10	130
6	$F_4$	4.0	7.0	7	1	0.25	25	20	37	30	10	130
7	$F_5$	6.0	7.0	0.5	0.1	0.30	10	0	21	17	4	100

表2 模拟计算获得的地震主要参数(括号内为实测或其它方法估算而得)

序号	地震时间		释 放 能 量 ( $\times 10^7$ J)	震 级 ( $M_s$ )	震 中 地 区
	年·月·日	小时			
1	1976.07.28	03	$2.9 \times 10^{21}$ ( $3.16 \times 10^{21}$ )	7.8 (7.8)	唐山市
2	1976.07.28	07	$4.0 \times 10^{21}$	6.5 (6.2)	宁河镇
3	1976.07.28	18	$2.4 \times 10^{21}$ ( $2.9 \times 10^{21}$ )	7.0 (7.1)	滦县

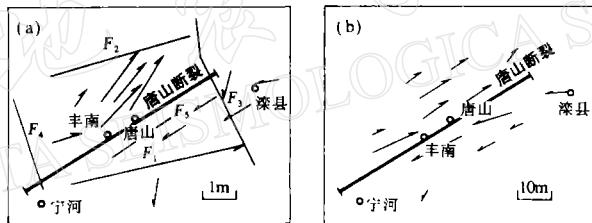


图5 唐山地震引起的水平位移矢量图

(a) 实测位移矢量图; (b) 计算位移矢量图

#### 四、结 论

通过以上的研究,我们可以得到以下结论:

1. 浅源构造地震的发生是地壳断层岩石在构造力的长期作用下突然发生破裂错动而引起的.
2. 地壳岩石的流变特性在很大程度上决定了地震发生的持续性和周期性.
3. 提出的模型能较好地模拟地壳岩石的粘滑机制和变形特性,这为粘滑作为地震发生机制的假设提供了一定的理论依据.
4. 所提出的模型能根据具体情况推广至平面问题的有限元计算中,并在一定的假设条件下能对实际地震序列进行数值模拟.通过对唐山地震序列的模拟结果来看,是比较成功的,从而可认为模型对地壳深部岩石的物理理想化是较为合理的,为用数值方法进行地震机制和深部岩石力学性质的研究开辟了新途径.

## 参 考 文 献

- Barce, W. F. and Byerlee, J. D., 1966. Stick-slip as a mechanism for earthquake. *Science*, **153**, 3739–3741.
- Brace, W. F., 1972. Laboratory studies of stick-slip and their application to earthquakes. *Tectonophysics*, **14**, 189–200.
- Dieterich, J. H., 1972a. Time-dependent friction in rock. *J. Geophys. Res.*, **77**, 3690–3697.
- Dieterich, J. H., 1972b. Time-dependent friction as a possible mechanism of aftershock. *J. Geophys. Res.*, **77**, 3771–3781.
- Reid, H. F., 1910. The elastic-rebound theory of earthquakes. *Univ. Calif. Pub. Bull. Dept. Geol. Sci.*, **6**, 413–444.
- Tao, Z. Y. and Zhang L. M., 1989. The behavior of rocks at great depth related to Tangshan Earthquake. *Proc. Intern. Sympo. Rock at Great Depth*, 489–493. Pau. France.